UNIVERSITÉ
de Cergy-Pontoise

Contrôle de mathématiques ENSI PC1 (durée 1 heure)

Les documents et calculatrices sont interdits.

Exercice 1

Résoudre, dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation :

$$4z^3+2(i-4)z^2+3(3-2i)z-9+\frac{9}{2}i=0$$

sachant que cette équation admet une solution réelle.

Exercice 2

1) Rappeler, dans $\mathbb{C}$, les n racines nièmes de l'unité.

2) En déduire la résolution, dans $\mathbb{C}$, de l'équation : $(1+z)^n-(1-z)^n=0$. On donnera une forme algébrique des solutions.

Exercice 3

Soit $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x=y=z\}$ et $V=\{(0,y,z)\in\mathbb{R}^3\}$.

1) Montrer que U,V sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base et la dimension de chacun d'eux.

2) A-t-on $\mathbb{R}^3=U\oplus V$ (somme directe) ?

Exercice 4

On considère l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).Soient les quatre vecteurs f_1 , f_2 , f_3 , f_4 de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définies par :

$$\forall x\in\mathbb{R}\,,\quad f_1(x)=1\,,\; f_2(x)=x\,,\; f_3(x)=e^x\,,\; f_4(x)=xe^x.$$

On pose $E=vect\{f_1\ ,f_2\ ,f_3\ ,f_4\ \}$.

1) Montrer que $\{f_1\ ,f_2\ ,f_3\ ,f_4\ \}$ est une base de E .

2) En déduire $\dim E$.