UNIVERSITÉ
de Cergy-Pontoise

CONTRÔLE DE MATHEMATIQUES DU 7/04/11 (durée 1h)

Soigner les présentation et rédaction. Documents et calculatrices interdits. Barème : 5 – 7 - 8

EXERCICE 1

1) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Justifier que A est inversible puis calculer sa matrice inverse A^{-1}.

2) Soit le système linéaire donné par :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 4x - 5y + z = 15 \\ 2x + 4z = 1 \end{cases}$$

En utilisant un équivalent matriciel , résoudre le système proposé.

EXERCICE 2

1) Diagonaliser la matrice triangulaire : $T = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

On donnera tout le détail du raisonnement et du calcul.

2) Trouver une matrice, carrée d'ordre 3, M vérifiant $M^2 = T$.

EXERCICE 3

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\varepsilon\mathbb{N}}$ définie par :

- la donnée de ses deux premiers termes : $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$.

- la relation de récurrence : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$

1) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer avec rigueur, selon la méthode de votre choix, que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & -2^{n+1} + 2 \\ 2^n - 1 & -2^n + 2 \end{pmatrix}$$

2) a) Vérifier que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

../..

b) Démontrer par récurrence que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \times \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n, u_0 et u_1 .

Calculer u_8.
