MS2PCST Contrôle de mathématiques du 17/02/11 (9h50-10h50)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de votre copie. Vous êtes invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats. Les documents, les calculatrices et tout matériel électronique sont interdits.
Barème : 7 – 6 - 7

EXERCICE 1

1) Quand dit-on qu'une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un ouvert U est de classe C^1 sur U ?

2) Soient les deux fonctions g et h définies respectivement par :

$$\begin{cases} g(x,y) = \frac{\sin(x^3y)}{x^2+y^2} \quad pour \ (x,y) \neq (0,0) \\ g(0,0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} h(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad pour \ (x,y) \neq (0,0) \\ h(0,0) = 0 \end{cases}$$

Sont-elles de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Dans les deux exercices suivants on se place dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ *r.o.n.d de l'espace.*

EXERCICE 2

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + 4x$

1) a) Déterminer le $\overrightarrow{Grad}\, f(x,y)$. En déduire le point critique $(x_0\,, y_0)$ de f sur $\mathbb{R}^2$.

b) Justifier que le point critique précédent est un extremum local de f dont on précisera la nature.

2) a) Pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, calculer $\Delta(h,k) = f(-2+h,-2+k) - f(-2,-2)$.

b) Montrer que,

$$\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2 , \quad \Delta(h,k) \geq 0$$

Que peut-on en déduire ?

EXERCICE 3

Soit la surface S définie par $z = f(x,y) = \sqrt{19 - x^2 - y^2}$

1) a) Préciser le plus grand domaine D où la fonction f est continue.

b) Caractériser la courbe de niveau $\sqrt{15}$.

2) a) Déterminer l'équation du plan tangent à S au point A(1, 3, 3).

b) Donner une approximation linéaire $l(x,y)$ de f en (1,3). En déduire une valeur approchée de $f(0{,}99\,;3{,}01)$.