UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

EXAMEN DE MATHEMATIQUES DE PC ENSI L1 du 9 mai 2011 (durée 2h)

Il faut soigner la rédaction et la présentation. Souligner vos résultats. Les documents et calculatrices sont interdits. *Barème prévisionnel : 13 - 7*

EXERCICE 1

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, on considère l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par :

$$u(e_1) = -e_2 - e_3$$

$$u(e_2) = -e_1 - e_3$$

$$u(e_3) = e_1 + e_2 + 2e_3$$

1) a) Ecrire la matrice $M_{\mathcal{B}}(u)$ de u dans la base $\mathcal{B}$. Est-elle inversible ? u est-elle bijective ?

b) Calculer $[M_{\mathcal{B}}(u)]^2$. Que peut-on constater ?

c) Pour tout vecteur $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, déterminer $u(v)$.

2) a) Soit $E' = \{v' \in \mathbb{R}^3 \ / \ v' = v - u(v) \ avec \ v \in \mathbb{R}^3\}$ .Montrer que E' est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1. On montrera qu'une base de E' est donnée par $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Indication : on pourra poser $v' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et utiliser 1)c).

b) Montrer que $\ker(u) = E'$. En déduire $u^2 = u \ o \ u = u$. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Indication : On rappelle que $M(f \ o \ g) = M(f) \times M(g)$

c) Déterminer $Im(u)$. On notera (v_2, v_3) une base de $Im(u)$.

d) Montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une nouvelle base de $\mathbb{R}^3$. A-t-on $\mathbb{R}^3 = \ker(u) \oplus Im(u)$?

e) Quelle la matrice $M_{\mathcal{B}'}(u)$ de u dans cette nouvelle base.

3) a) Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de u.

b) En déduire , pour tout entier naturel n, $[M_{\mathcal{B}}(u)]^n$. Que constate-on ? Pouvait-on prévoir ce résultat ?

suite ../..

EXERCICE 2 ***Les 2 questions sont totalement indépendantes.***

1) Soit l'équation définie dans $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^4 - z^3 + z^2 + 2 = 0$.

a) Démontrer que (1+i) est solution de l'équation. En déduire que (1-i) est aussi une solution.

b) En utilisant la question précédente, montrer que $P(z)$ est factorisable par $z^2 - 2z + 2$.

c) En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation proposée.

2) Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit l'équation dans $\mathbb{C}$ donnée par : $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}$

a) Montrer que si z est solution de (E) on a $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1$.

b) Dans le plan complexe, on note M , A, B les points d'affixe respective $z, i, -i$. En interprétant géométriquement le a) montrer que toutes les solutions de (E) sont réelles.

c) Résoudre (E) dans le cas où $a = 1$. On utilisera les formes exponentielles complexes.
