EXAMEN DE MATHEMATIQUES DE PCST S2 du 10 mai 2011 (durée 3h)

Il faut soigner la rédaction et la présentation. Souligner vos résultats.

Les documents et calculatrices sont interdits. Barème prévisionnel : 8 – 4 - 8

EXERCICE 1

L'espace E est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

1) Soient les trois points $A\left(0,0,\frac{5}{4}\right)$, $B\left(\frac{5}{3},0,0\right)$, $C(1\,,1\,,\frac{1}{2})$.

a) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (P) défini par A, B, C est donnée par :

$$3x + 4z - 5 = 0.$$

2) On note Γ l'ensemble des points M du plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$ équidistants du plan (P) et de l'origine O.

a) Donner la distance d'un point $M\,(x, y\,, z)$ au plan (P).

b) En déduire que l'ensemble Γ admet pour équation dans le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{3x-5}{5}\right)^2$$

c) Soit (D) la droite d'intersection des plans (P) et $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$.

• Montrer que Γ est une conique de foyer O et de directrice (D).

•Déterminer son excentricité et en déduire la nature de la conique.

d)

• Préciser les sommets de l'axe focal, le centre et les autres sommets. On donnera les coordonnées de ces points dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$.

•Représenter, soigneusement, Γ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$.

Indication : $15^2 = 225$ et $16^2 = 256$

EXERCICE 2

Soit $f: (x, y) \longmapsto f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$.

1) Montrer que f admet trois points critiques.

2) En déduire l'étude des extrema de f.

EXERCICE 3

1) Soit la matrice carrée d'ordre 3 $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs propres de *A*.

b) Déterminer les vecteurs propres de *A*. En déduire qu'une matrice de passage est donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Déterminer la matrice inverse P^{-1} de *P*. En déduire la matrice *D* vérifiant $D = P^{-1}AP$.

On se propose de donner deux applications du résultat précédent. Les deux questions suivantes sont indépendantes.

2) En utilisant le résultat du 1)c) calculer, pour tout entier naturel *n* , A^n.

3) Soit le système différentiel (S) défini par :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y - 4z \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 3y + 2z \\ \frac{dz}{dt} = 3x - 3y - 4z \end{cases}$$

où x, y, z sont trois fonctions dérivables de la variable t.

a) On pose $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\frac{dY}{dt} = \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{pmatrix}$.

Donner un équivalent matriciel du système (S).

b) On pose $Z = P^{-1}\,Y$ avec $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ et $\frac{dZ}{dt} = \begin{pmatrix} dz_1/dt \\ dz_2/dt \\ dz_3/dt \end{pmatrix}$. On admet que : $\frac{dZ}{dt} = P^{-1}\frac{dY}{dt}$

En utilisant les questions 1)c) et 3)a) montrer que l'on a :

$\frac{dY}{dt} = PDP^{-1}Y$ puis que $\frac{dZ}{dt} = DZ$

c) En déduire z_1 , z_2 , z_3 puis x, y, z.