UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise
UFR des Sciences et Techniques
Coordination des enseignements

CONTRÔLE DE MATHEMATIQUES DU 8/04/10

Il faut soigner la rédaction et la présentation et souligner vos résultats.
Les documents et calculatrices sont interdits. Barème : 7 – 5 – 8

EXERCICE 1

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(0;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$.

1) Soient les plans P_1 et P_2 d'équations cartésiennes respectives,

$$3x+2y-z=5 \quad et \quad x-y+z=1.$$

a) On donne les vecteurs $\vec{u}\,(3\,;2\,;\,-1)$ et $\vec{v}\,(1\,;\,-1\,;1)$.
Calculer $\vec{u}\wedge\vec{v}$. En déduire que les plans P_1 et P_2 sont sécants selon une droite D.

b) Donner un système de représentation paramétrique de la droite D.

2) Soit le système (S)

$$\begin{cases} 3x+2y-z=5 \\ x-y+z=1 \\ 2x-4y+5z=-3 \end{cases}$$

a) Montrer que,

$$(S) \Leftrightarrow M \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{où M est une matrice à préciser.}$$

b) Justifier que M est inversible et calculer sa matrice inverse M^{-1}.

c) En déduire la résolution du système (S).

3) Soit le plan P_3 de repère cartésien $(A,\ \vec{u}_1,\ \vec{u}_2)$ avec A(– 3/2 ; 0 ; 0) , $\vec{u}_1(2\,;1\,;0)$ et $\vec{u}_2(-5\,;0\,;2)$.
- Déterminer une équation cartésienne de P_3 .
- A l'aide de la droite D du 1) retrouver, en le justifiant, la solution de (S).

EXERCICE 2

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer, par récurrence, que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = \begin{pmatrix} 2^{-n} & 2-2^{1-n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Soit la suite numérique (u_n) définie, pour tout entier n, par :
$u_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 1$.
Montrer que, pour tout entier n,

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} u_n \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{puis que,} \quad \begin{pmatrix} u_n \\ 1 \end{pmatrix} = A^n \times \begin{pmatrix} u_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3) En déduire l'expression de u_n en fonction de n. Calculer u_7 .

EXERCICE 3

1) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs propres de A : on les notera λ_1 , λ_2, λ_3 avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
En déduire que A est diagonalisable.

b) Déterminer un vecteur propre $\overrightarrow{u_1}$ associé à la valeur propre λ_1. On admettra que $\overrightarrow{u_2}$(1 ; 1 ; 0) est un vecteur propre associé à λ_2 et $\overrightarrow{u_3}$ (0 ; –2 ; 1) à λ_3.

2) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note P^{-1} sa matrice inverse.

Déterminer la matrice $D = P^{-1}AP$.

3) Soit le système d'équations différentielles ,

$$\frac{\mathrm{dX(t)}}{\mathrm{dt}} = AX(t) \quad \text{avec} \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{dX(t)}}{\mathrm{dt}} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} \quad (1)$$

x, y, z sont des fonctions dérivables de la variable réelle t.

a) On pose $Y = P^{-1} X$ avec $Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$. Montrer que l'on a,

$$\frac{\mathrm{dY(t)}}{\mathrm{dt}} = DY(t) . \quad (2)$$

b) Résoudre le système (2). En déduire les solutions x, y, z du système (1).
