UNIVERSITÉ
de Cergy-Pontoise

MATHEMATIQUES (18/02/10 de 13h 45 à 15h15)

Les documents et calculatrices sont interdits. Il faut soigner la rédaction et la présentation et souligner vos résultats. Barème prévisionnel : 3 – 4 – 3 – 4 – 6 .

EXERCICE 1

1) Soit la fonction $f : (x, y) \mapsto \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$. Etudier la limite en (0,0).

Indication : on pourra envisager les chemins $y = ax$ $(a \in R)$ et $x = y^2$.

2) Soit la fonction $g : (x, y) \mapsto \dfrac{\tan(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$. Etudier la limite de g en (0,0).

EXERCICE 2

Soit la fonction f définie sur R^2 par : $\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue en $(0,0)$.

2) En justifiant que f admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur R$^2 \setminus \{(0,0)\}$,

calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. Sont-elles continues en (0,0) ?

EXERCICE 3

Soit la fonction $f : (x, y) \mapsto xe^{xy}$.

1) Donner une équation du plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ en (2,0).

2) Utiliser l'approximation linéaire de f pour donner une valeur approchée de $f(2{,}1\,;-0{,}1)$.

EXERCICE 4

On dit qu'une fonction $h : (x, y) \mapsto h(x, y)$ de R^2 dans R est harmonique si :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 .$$

1) Soit la fonction $k : (x, y) \mapsto \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Est-elle harmonique ?

../..

2) Soient f et g deux fonctions de classe C ^{2} de R ^{2} dans R telles que :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$$

a) Montrer que f et g sont harmoniques.

b) **QUESTION BONUS** : $f \times g$ est-elle harmonique ?

EXERCICE 5 *Les 2 questions sont indépendantes*

1) Soit la fonction f définie sur R ^{2} par :

$$f(x,y) = 4x^2 - 2xy + 7y^2 + 4.$$

a) Déterminer le $\overrightarrow{grad} f(x,y)$.

b) Rechercher le point critique (x_0, y_0) de f.

c) Déterminer le signe du polynôme $P(X) = 4X^2 - 2X + 7$.

d) En remarquant que, pour y non nul, $f(x,y) - 4 = y^2\left(4\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{y}\right) + 7\right)$, montrer que :

$\forall (x,y) \in R^2$, $f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$.

Que peut-on en conclure ?

2) Soit la fonction f définie sur l'ouvert $]0,1[\times]0,1[$ de R ^{2} par :

$$f(x,y) = (1-x)^n + (1-y)^n + (x+y)^n \quad (n \in N^*)$$

a) Rechercher l'unique point critique de f noté (x_0, y_0).

b) Calculer , $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$.

c) Le point (x_0, y_0) est-il un extremum de f ?