

**PCST S2      MATHEMATIQUES SESSION 2 ( 15/06/10 de 13h30 à 15H)**

*Les documents et calculatrices sont interdits. Barème prévisionnel : 4-7-5-4*

**EXERCICE 1**

Soit la fonction  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}y^3 - x^2 - 3x - 4y - 3$$

- 1) Déterminer les points critiques de  $f$ .
- 2) Faire l'étude des extrema locaux de  $f$ .

**EXERCICE 2**

Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

- 1) Calculer  $A^2$ .
- 2) a) Déterminer les valeurs propres de  $A$ .
- b) Soit la matrice  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Calculer  $P^{-1}$ .
- c) Déterminer la matrice  $D$  telle que :  $D = P^{-1}AP$ .
- d) En déduire, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $A^n$ . Retrouver le résultat du 1).

**EXERCICE 3**

On se place dans un repère orthonormal de l'espace. Soient les deux droites

$d$  et  $d'$  d'équations respectives :

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ 3x + y - 3z - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x + y - z - 4 = 0 \\ x - y - 5z + 6 = 0 \end{cases}$$

- 1) Donner un système d'équations paramétriques de chacune des deux droites.

../..

2)a) Soient  $A(1; -1; 0)$ ,  $B(-1; 5; 0)$ ,  $\vec{u}(5; 6; 7)$  et  $\vec{u}'(3; -2; 1)$ .

Montrer que  $(A, \vec{u})$  et  $(B, \vec{u}')$  sont respectivement des repères cartésiens de  $d$  et  $d'$ .

b) Calculer  $\overrightarrow{AB} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{u}')$ . Que peut-on dire des droites  $d$  et  $d'$  ?

#### EXERCICE 4

On se place dans un repère orthonormal du plan.

1) Reconnaître la conique d'équation :

$$9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$$

Préciser ses éléments caractéristiques et la construire.

2) Mêmes questions avec :

$$4x^2 - 9y^2 + 8x + 54y - 41 = 0$$

---