PCST S2 EXAMEN DE MATHEMATIQUES DU 17 /05/10 (durée 3h)

UNIVERSITÉ
de Cergy-Pontoise

Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation de votre copie . Les résultats doivent être soulignés .Les documents et calculatrices sont interdits.

Barème prévisionnel : 5 points par exercice.

EXERCICE 1 *Les parties A et B sont totalement indépendantes*

A Soit la fonction $f : (x, y) \longmapsto x^3 - y^2 - x$

1) Déterminer les points critiques.

2) Chercher les extrema de f.

B 1) Soit la fonction $g : t \longmapsto t + 2sht$

Montrer que l'équation $g(t) = 0$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}$. La préciser.

2) Soit la fonction $h : x \mapsto xe^y + ye^x$

a) Etablir que si $e^{y-x} + y = 0$ et $e^{x-y} + x = 0$ alors $2sh(y - x) + (y - x) = 0$.

b) En déduire le seul point critique de h.

c) Montrer que,

$$h(-1 + k, -1 + p) - h(-1, -1) = e^{-1}\left(2kp - \frac{k^2}{2} - \frac{p^2}{2}\right) + o(\|(k, p)\|^2).$$

Le point critique est-il un extremum ?

EXERCICE 2

Soit m un paramètre réel et soit la matrice A$=\begin{pmatrix} m-1 & 1 & -1 \\ 2 & m & 1 \\ m & 1-m & m \end{pmatrix}$.

1) a) Montrer que : Det A $= m^3 + m^2 - m - 1$.

b) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles A est inversible.

c) Calculer la matrice inverse de A pour $m = 0$.

2) Soit le système :

$$\begin{cases} (m-1)x + y - z = m \\ 2x + my + z = 3 \\ mx + (1-m)y + mz = m^2 \end{cases}$$

a) Donner un équivalent matriciel de ce système.

b) En déduire la résolution du système pour les valeurs suivantes de m :

$m = 1$ puis, $m = -1$ et enfin $m = 0$.

c) Interpréter, en termes de géométrie dans l'espace, les résultats trouvés au b).

EXERCICE 3

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = 1 \end{cases}$$

On pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

1) Déterminer une matrice A carrée d'ordre 2 telle que : $X_{n+1} = AX_n$.

2) a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. Est-elle diagonalisable ?

b) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice $D = P^{-1}AP$.

c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.

d) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

e) Exprimer u_n et v_n en fonction de n. Les deux suites convergent-elles ?

EXERCICE 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Soit la courbe Γ définie en polaires par $\rho(\theta) = \frac{1}{1 + cos\theta}$

1) a) Préciser l'ensemble de définition de ρ.

b) Justifier que ρ est périodique. Comparer $\rho(-\theta)$ à $\rho(\theta)$.

c) En déduire que l'on peut faire l'étude de ρ sur l'intervalle $[0, \pi[$.

Par quelle symétrie obtiendra-t-on l'ensemble de la courbe Γ ?

2) a) Etudier les variations de ρ sur l'intervalle $[0, \pi[$.

b) Faire l'étude de la branche infinie de Γ au voisinage de π.

c) Tracer, avec soin, la courbe Γ. On précisera la tangente en 0.

3) On pose :

$$\begin{cases} x = \rho(\theta)cos\theta \\ y = \rho(\theta)sin\theta \end{cases}$$

Déterminer une équation cartésienne de Γ (c'est-à-dire une relation entre x et y).

Reconnaître la conique considérée. Pouvait-on prévoir ce résultat ?