UCP/ MS2-PC Contrôle de mathématiques du 2/04/09

Les calculatrices et documents sont interdits. Il faut soigner la rédaction et la présentation.

Barème prévisionnel : 5 – 6 - 9

Exercice 1

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

Soit la fonction f de R^2 dans R définie par : $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

1) a) Calculer $\overrightarrow{\text{grad}}f(x,y)$.

b) Montrer que f admet 4 points critiques.

2) Faire l'étude des extrema de f.

Exercice 2

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

Soit la fonction f de R^2 dans R définie par : $f(x,y) = \alpha(x+3)^2 + \beta y^2$ avec α,β deux réels non nuls.

1) a) Rechercher le point critique de f.

b) On se place dans le cas où $\alpha\beta > 0$. Montrer qu'alors le point critique est soit un maximum soit un minimum absolu. Pour cela on envisagera deux cas sur les réels α,β.

2) On pose $\alpha = 16$ et $\beta = 25$.

a) Déterminer la nature de la courbe d'intersection de la surface z = f(x,y) avec le plan d'équation z = 400.

b) Représenter soigneusement cette courbe dans un repère orthonormé. On précisera le centre, les sommets, les axes de symétrie.

3) On pose $\alpha = 16$ et $\beta = -25$.

Déterminer la nature de la courbe d'intersection de la surface z = f(x,y) avec le plan d'équation z = 400.

Exercice 3

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Montrer que : $A^2 = 3I - 2A$.

2) a) Déterminer les valeurs propres de la matrice A.

b) Montrer qu'un vecteur propre associé à la valeur propre (-3) est donné par : $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Pour la suite on considère la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ../..

.

3) a) Justifier que P est inversible et calculer P^{-1}.

b) Déterminer la matrice D telle que : $D = P^{-1}AP$. Que peut-on dire de D ?

c) - Justifier que $A = PDP^{-1}$.

- En déduire, pour tout entier naturel $n \geq 1$, A^n. On explicitera la matrice A^n.

4) On considère les suites u et v définies par :

$$\begin{cases} u_0 = v_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 6 - 5u_n + 6v_n \ \text{ et } \ v_{n+1} = 2 - 2u_n + 3v_n \end{cases}$$

On note, pour tout entier n, $X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

a) Montrer que, pour tout entier n, $X_{n+1} = AX_n$.

b) En utilisant la question 2) c), expliciter les termes généraux u_n et v_n des suites u et v en fonction de n.