

UCP/ MS2-PCST MATHEMATIQUES SESSION 2 (16/06/09 de 10h à 11h30)

Les documents et calculatrices sont interdits. Barème prévisionnel : 5 points par exercice.

Exercice 1

Déterminer le réel a pour que les deux droites :

$$D \begin{cases} x + 2 = -2z \\ y = 3x + z \end{cases} \text{ et } D' \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + y - z = a \end{cases}$$

soient coplanaires.

Exercice 2 Les deux questions sont indépendantes

On se place dans un repère orthonormal du plan.

1) On considère l'ensemble E des points $M(x; y)$ du plan vérifiant :

$$x^2 + 4y^2 - 2x - 16y - 23 = 0.$$

Démontrer que E est une conique dont on précisera le centre, les axes, les sommets, les foyers, les directrices et l'excentricité.

2) On considère un mobile M dont les coordonnées sont données en fonction du temps par :

$$x(t) = \frac{2}{\sin t} \text{ et } y(t) = \sqrt{5} \frac{\cos t}{\sin t} \text{ avec } t \in]0, \pi[.$$

Montrer que M décrit une partie d'une hyperbole que l'on caractérisera.

Exercice 3

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^3(1 - 4y^2) + y^2$.

- 1) Rechercher les points critiques.
- 2) Faire l'étude des extrema de f .
- 3) En utilisant les coordonnées polaires faire l'étude du signe de $f(x, y)$ au voisinage de $(0, 0)$. f admet-elle un extremum local en $(0, 0)$?

Exercice 4

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

- 1) Calculer les valeurs propres de A et en déduire que A est diagonalisable.
 - 2) Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
 - 3) a) Pour tout entier naturel n calculer A^n .
b) Appliquer le résultat précédent à A^4 .
-