UCP /MS2-PCST EXAMEN DE MATHEMATIQUES DU 18 MAI 2009 (9h-12h)

Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation de votre copie : les résultats doivent être encadrés ou soulignés. Les représentations sont à faire, avec précision, sur du papier millimétré. Les calculatrices et documents sont interdits.

Barème prévisionnel : 3 – 3 – 6 - 8

Exercice 1

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct ($O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$). Soient les points $A\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, $B\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ et $F(0,1,0)$.

1) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}$.

2) On suppose dorénavant que le point M est dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Déterminer l'ensemble (C) des points $M(x, y, 0)$ tels que :

$$\left\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MF}\right\|$$

b) Préciser la nature de (C). Construire l'ensemble (C) dans le repère ($O, \vec{i}, \vec{j}$).

c) En interprétant géométriquement $\left\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\right\|$ montrer l'équivalence suivante :

$\left\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MF}\right\| \Leftrightarrow MH = MF$ où MH représente la distance du point M à la droite (AB).

Retrouver la nature de la conique (C). On précisera son foyer et sa directrice.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$$

1) a) Rechercher le(s) point(s) critique(s) de f.

b) Etudier le(s) extremum de f.

2) a) On pose : $X = x$ et $Y = y - 3$. Montrer que : $f(x, y) = X^2 + XY + Y^2 - 9$.

b) En déduire que : $f(x, y) - f(0,3) \geq 0$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. on considère un point mobile M tel que :

$\overrightarrow{OM} = (t^2-1)\vec{i} + (t^3-4t)\vec{j}$ où t désigne le temps.

1) Soit la courbe paramétrée Γ définie par $\begin{cases} x(t) = t^2 - 1 \\ y(t) = t^3 - 4t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

a) Justifier que l'on peut réduire l'étude de Γ à l'intervalle $[0,+\infty[$. Par quelle symétrie obtiendra-t-on, alors, toute la courbe ?

b) - Faire l'étude des variations simultanées de x et y sur $\mathbb{R}^+$. On précisera les points où les tangentes sont verticales et horizontales ainsi que les points d'intersection de Γ avec les axes de coordonnées.

- Faire l'étude des branches infinies.

c) Construire Γ (choisir $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\text{cm}$).

2) Dans cette question, on suppose que : $t \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$.

a) Représenter, dans ce cas, la trajectoire du mobile M.

b) Déterminer les vecteurs $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$, $\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$. Que représentent- ils pour le mobile M ?

c) Calculer le produit scalaire $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \cdot \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$. En déduire, selon les valeurs de t, l'allure du mouvement (accéléré ou retardé) de M sur sa trajectoire.

On donne pour tout l'exercice : $\dfrac{16}{3\sqrt{3}} \approx 3{,}08$; $\sqrt{5} \approx 2{,}24$; $\dfrac{\sqrt{10}}{3} \approx 1{,}05$.

Exercice 4 Les parties I et II sont en grande partie indépendantes.

Partie I

On considère les matrices **:** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^2 et vérifier que $A^2 - A = 2I$.

2)a) Montrer l'équivalence suivante :

$$A^2 - A = 2I \Leftrightarrow A \times \frac{1}{2}(A - I) = \frac{1}{2}(A - I) \times A = I.$$

b) En déduire que la matrice A est inversible et expliciter sa matrice inverse A^{-1}.

c) En utilisant b), résoudre le système linéaire de 3 équations à 3 inconnues :

$$A\times\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Partie II

A étant la matrice définie précédemment, on suppose que, pour tout entier naturel n, il existe deux suites numériques (u_n) et (v_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = u_n.A + v_n.I \qquad \text{avec } A^0 = I.$$

1) Justifier que :

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad v_1 = 0, \quad u_2 = 1, \quad v_2 = 2.$$

2)a) En utilisant le 1) de la partie I, montrer que, pour tout entier n,

$$A^{n+1} = (u_n + v_n).A + 2u_n.I$$

Indication : on pourra écrire que $A^{n+1} = A^n \times A$.

b) En déduire que , pour tout entier n,

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n \end{cases}$$

3) Pour tout entier n, on pose $W_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Montrer que :

$$W_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times W_n.$$

4) On pose $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Rechercher les valeurs propres de la matrice B.

b) - Montrer que l'on peut choisir pour matrice de passage la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

- Déterminer sa matrice inverse P^{-1}.

c) Expliciter la matrice D vérifiant : $D = P^{-1}BP$.

d) Calculer, pour tout entier n , la matrice B^n.

5)a) Déduire des questions précédentes les expressions des termes généraux u_n et v_n des suites u et v en fonction de n.

b) Les suites u, v convergent-elles ?