UCP / PCST S2 **Contrôle du 21/02/08 (durée 1h30)**

Documents et calculatrices interdits.

Exercice 1

Soit l'équation différentielle du premier ordre **:** $xy' + (1-x)y = \dfrac{xe^x}{x^2+1}$ (E)

1) Déterminer toutes les solutions de (E) sur R_+^* et sur R_-^*.

2) a) Soit f la fonction définie sur R par :

$$\begin{cases} \forall x \in R^*, f(x) = \dfrac{e^x}{2x}\ln(x^2+1) \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est continue et dérivable sur R. On étudiera en particulier le problème en 0.

b) Justifier que f est une solution, sur R, de (E).

Exercice 2

1) Résoudre l'équation différentielle du second ordre : $y'' + y' - 2y = e^x - x - 1$.

On cherchera une solution particulière, selon le principe de superposition ,

du type $P(x)e^x + Q(x)$ avec P et Q deux polynômes de degré à préciser.

2) Déterminer la solution de l'équation différentielle précédente vérifiant : $y(0) = y'(0) = 0$.

Exercice 3 Les deux questions sont totalement indépendantes

1) Calculer, si elle existe, la limite suivante :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3xy+4y^2}{3x^2+5y^2}.$$

2) Soit f la fonction définie sur R^2 par :

$$\begin{cases} f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue sur R^2.

Indication : pour la continuité en (0,0) on remarquera que $\left|f(r\cos\theta, r\sin\theta\right| \leq r^2/2$.

b) Montrer que f est de classe C^1 sur R^2.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur R^2 par : $f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$.

Soit $z = f(x,y)$ l'équation de la surface (S) dans un r.o.n.d $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

1) Justifier que f est de classe C^2 et calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2.

2) On pose ∇f (x,y) = $\overrightarrow{\text{grad}} f(x,y) = f'_x(x,y)\vec{i} + f'_y(x,y)\vec{j}$. Déterminer les points critiques de f ($\nabla f = \vec{0}$) et préciser leur nature.

3) a) Donner l'équation du plan tangent à la surface (S) au point P(1,2,1).Donner une approximation linéaire, L(x,y), de f en (1,2). En déduire une valeur approchée de f (1,1 ; 1,98).

b) On appelle polynôme de Taylor du second degré de f en (a,b) le polynôme Q(x,y) défini par :

$$f(a,b) + f_x'(a,b)(x-a) + f_y'(a,b)(y-b) + \frac{1}{2}f''_{xx}(a,b)(x-a)^2 + f''_{xy}(a,b)(x-a)(x-b) + \frac{1}{2}f''_{yy}(a,b)(y-b)^2$$

et l'approximation $f(x,y) \approx Q(x,y)$ est appelée l'approximation quadratique de f en (a,b).

Calculer l'approximation quadratique de f en (1,2). En déduire une valeur approchée de f (1,1 ; 1,98)

c) On donne $f(1{,}1\,;1{,}98) = 1{,}558592$ .Commenter la modélisation de f par L et Q.