UCP **EPREUVE DE MATHEMATIQUES DU 27/03/08 (durée 1h30)**

Calculatrice et documents interdits.

Barème prévisionnel : 4 – 6 – 6 – 4.

EXERCICE 1 Les 2 questions sont totalement indépendantes

1) Soient a, b deux réels fixés. Soit le polynôme homogène P du troisième degré défini par : $P(x,y) = a(x^3 - 3xy^2) + b(3x^2y - y^3)$.

Montrer que P vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

2) On admet le résultat suivant : si $z = f(x,y)$ où $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ alors,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}.$$

Soit f la fonction définie sur $R^2 \setminus \{(0,0)\}$ par : $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$. En utilisant le résultat admis, montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$.

EXERCICE 2

Soit la fonction $f : R^2 \to R$ définie par : $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

1) En justifiant que f est de classe C^2 calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f .

2) a) Rechercher le(s) point(s) critique(s) de f.

b) Etudier le(s) extremum.

c) Montrer que : $\forall (x,y) \in R^2$, $f(x,y) - f(0,3) = \left(x + \frac{y-3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(y-3)^2$.

Que peut-on en déduire ?

EXERCICE 3

Soit l'espace vectoriel R^3 muni de la base canonique B = (e_1, e_2, e_3) .On désigne par f l'application linéaire de R^3 dans lui-même dont la matrice dans la base canonique B est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) a) Calculer le carré M^2 de la matrice M. On note g l'endomorphisme associé à la matrice M^2 dans la base B.

b) Déterminer les images par g des vecteurs de la base B ainsi que l'image par g de tout vecteur v = (x,y,z) de R^3.

c) Caractériser l'ensemble N(g) = $\left\{ (x,y,z) \in R^3 / g(x,y,z) = 0_{R^3} \right\}$ ../..

2) Montrer, par récurrence, que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}/\{0\}, \quad M^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 2 - 2^{n+1} & 2^{n+1} - 2 & 2^n \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 4

1) Soient les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et, $B = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Calculer $A \times B$ et $B \times A$. Que peut-on en conclure ?

2) Soit le système linéaire d'inconnues x , y , z tel que :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + y = 2 \\ -2x + y + z = -2 \end{cases} \quad (S)$$

a) Donner un équivalent matriciel du système (S).
b) Utiliser le 1) pour résoudre (S).
c) Interpréter, dans l'espace affine, la résolution de ce système.