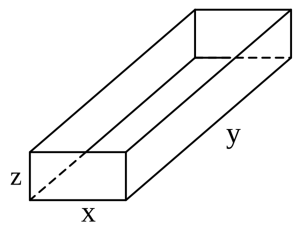
UCP /PCST S2 Examen session 2 mathématiques du 10/06/08 (durée 1h30)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Vous êtes invités, dans la mesure du possible, à encadrer vos résultats.
L'usage des documents et calculatrices est interdit.
Barème prévisionnel : 7 - 6 - 7

Exercice 1

Soit la fonction à deux variables réelles strictement positives définie par :

$$f(x,y) = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x+y)}.$$



1) a) Calculer les dérivées partielles du premier ordre.
   b) Déterminer le $\overrightarrow{\text{grad}f}(x,y)$ et rechercher les points critiques de f.
   c) En déduire les extremum locaux de f.
2) On veut fabriquer une boite rectangulaire sans couvercle de dimensions x, y, z. Quel est le volume maximum de cette boite, sachant que l'on dispose de 12m^2 de carton ?

Exercice 2

Soit l'équation différentielle du second ordre définie par :

$$\text{(E)} \qquad y'' + 4y' + 4y = 18\,\text{ch}t \quad \text{avec, } \text{ch}t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

1) On pose y(t) = $e^{-2t}z(t)$ où z est une fonction de classe C^2.
   a) y étant solution de (E) , déterminer l'équation différentielle (E') vérifiée par z.
   b) Résoudre l'équation différentielle (E').
   c) En déduire la solution générale de (E).
2) Déterminer la solution de (E) vérifiant : y(0) = y'(0) = 0.

Exercice 3

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1)a) Déterminer les valeurs propres de A.
   b) Montrer que le sous-espace propre associé à la valeur propre 9 est donné par Vect { $v_1 = (20;4;3)$}. On admettra que les sous-espaces propres associés aux valeurs propres respectives 4, 1 sont donnés par : Vect { $v_2 = (0;3;1)$} , Vect{ $v_3 = (0,0,1)$}.

../..

c) Préciser la matrice de passage P de la base canonique de R^3 à la base (v_1, v_2, v_3) et calculer sa matrice inverse P^{-1}.

d) En déduire la matrice D telle que : $D = P^{-1}AP$.

2) a) Exprimer la matrice A en fonction de D.

b) Déterminer la matrice N telle que : $N^2 = D$.

c) En justifiant que $A = (PNP^{-1})^2$ en déduire la matrice M telle que : $M^2 = A$.