UCP /PCST S2 Examen de mathématiques du 14/05/08 (durée 3 heures)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Vous êtes invités, dans la mesure du possible, à encadrer vos résultats.
L'usage des documents et calculatrices est interdit.
Barème prévisionnel : 4 – 4 – 3 – 4 - 5

Exercice 1

1) a) Déterminer les trois réels a, b, c tels que : $\forall x \in R^{+*}$, $\dfrac{1}{x^2(x+1)} = \dfrac{a}{x^2} + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x+1}$.

b) En déduire les primitives de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2(x+1)}$ sur R^{+*}.

2) Résoudre, sur R^{+*}, l'équation différentielle :

$$x^2(1+x)y' + y = x.$$

Exercice 2

Soit l'équation différentielle du second ordre :

$$y'' - 2y' + y = \frac{2e^t}{(1+t)^3} \qquad (\text{ E })$$

1) Vérifier que $y_1(t) = \dfrac{e^t}{1+t}$ est une solution de (E).

2) Résoudre l'équation (E). On notera y(t) les solutions.

3) a) Déterminer la solution de (E) vérifiant les deux conditions :

$$y(0) = 1 \quad \text{et} \quad y'(0) = 0.$$

b) Déterminer un développement limité à l'ordre 3, au voisinage de $t = 0$, de la fonction y trouvée au a).

Exercice 3

On pose : $\forall (a,b) \in R^2$, $f(a,b) = \displaystyle\int_0^1 (\sqrt{x} - ax - b)^2 \, dx$.

1) Montrer que $f(a,b) = \dfrac{1}{3}a^2 + b^2 + ab - \dfrac{4}{5}a - \dfrac{4}{3}b + \dfrac{1}{2}$.

Indication : Pour calculer l'intégrale on pourra développer le carré.

2) Etudier les extrema éventuels de la fonction f à deux variables a et b.

../..

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur $[0\,;1]\times[0\,;1]$ par : $f(x,y)=\dfrac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$.

1) a) Déterminer le $\overrightarrow{\text{grad}}f(x,y)$.

b) Montrer que le seul point critique est donné par : $C\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3};\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

2) Déterminer le maximum de f .

Exercice 5

Partie A

1) Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}1/2 & 1/4 & 1/4\\ 1/3 & 1/3 & 1/3\\ 1/4 & 1/4 & 1/2\end{pmatrix}$.

a) Montrer que le polynôme caractéristique de A est donné par :

$p_A(\lambda)=(1-\lambda)(\frac{1}{12}-\lambda)(\frac{1}{4}-\lambda)$.

En déduire le spectre de A.

b) Soit (v_1,v_2,v_3) une base de vecteurs propres associés aux valeurs propres respectives 1, 1/4, 1/12.

Montrer que $v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

On admettra que : $v_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $v_3=\begin{pmatrix}3\\-8\\3\end{pmatrix}$.

2) Soit P la matrice de passage de la base canonique de R^3 à la base (v_1,v_2,v_3) des vecteurs propres.

a) Ecrire P. Justifier que P est inversible et vérifier que la matrice inverse P^{-1} est donnée par : $P^{-1}=\dfrac{1}{22}\begin{pmatrix}8 & 6 & 8\\ 11 & 0 & -11\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$

../..

b) Déterminer la matrice $D = P^{-1}AP$.

c) Pour tout entier naturel n non nul, donner l'expression de D^n.

d) Montrer que pour tout entier naturel non nul : $A^n = PD^nP^{-1}$.

Partie B

On utilise pour les matrices les mêmes notations que dans la partie A.

Soit les suites réelles u, v, w définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \quad v_0 = 22 \quad w_0 = 22 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{4}(2u_n + v_n + w_n) \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + v_n + w_n) \\ w_{n+1} = \dfrac{1}{4}(u_n + v_n + 2w_n) \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}$$

1) Pour tout n entier naturel , on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

Justifier que :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n$ puis que, $X_n = A^nX_0$.

2) a) Utiliser la partie A pour exprimer, pour tout entier naturel n, u_n, v_n, w_n en fonction de n.

b) Montrer que ces suites sont convergentes vers un même réel que l'on déterminera.

____