

**PCST2 - ESCOM EXAMEN DE MATHÉMATIQUES DU 20/06/06**  
**de 14h30 à 16h30**

Les calculatrices et les documents sont interdits.

Il sera tenu compte de la présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements. Les candidats sont invités, dans la mesure du possible, à encadrer les résultats.

**EXERCICE 1** Les deux questions sont totalement indépendantes

- 1) a) Déterminer, pour tout réel  $x$  différent de 1, quatre constantes réelles  $A, B, C, D$  telles que :

$$\frac{x+1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

- b) En déduire la primitive de la fonction  $f : x \mapsto \frac{x+1}{(x-1)^2(x^2+1)}$  qui s'annule pour  $x = 0$ .

- 2) Calculer l'intégrale  $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{(1+\cos x)^2} dx$  au moyen du changement de variable  $t = \cos x$ .

**EXERCICE 2** Les trois questions sont totalement indépendantes

- 1) Pour tout couple  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{++}$  on pose  $f(x, y) = y(x^2 + \ln^2 y)$ .

a) Justifier que  $f$  est de classe  $C^2$ .

b) Rechercher les points critiques de  $f$ .

c) En déduire, à l'aide du théorème de l'extremum, les extrema relatifs éventuels de  $f$ .

d) Montrer que pour tout couple  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{++}$  et  $(x, y) \neq (0, 1)$ , on a  $f(x, y) > 0$ . Que peut-on en déduire pour  $(0, 1)$  ?

- 2) Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$  on pose  $f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ . Montrer que l'on a :

$$-y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 1$$

- 3) Pour tout triplet  $(x, y, z) \in (\mathbb{R}^*)^3$ , on pose

$$g(x, y, z) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \arctan\left(\frac{y}{z}\right) + \arctan\left(\frac{z}{x}\right)$$

On dit que  $g$  est harmonique si son Laplacien  $\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}$  est nul pour tout triplet

$(x, y, z)$  de l'ouvert  $(\mathbb{R}^*)^3$ .  $g$  est-elle harmonique ?

**EXERCICE 3**

Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

- 1) Justifier qu'elle est inversible et déterminer sa matrice inverse  $A^{-1}$ .  
2) En déduire la solution du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 3x - 4y - 2z = 1 \\ x + 5y - 2z = 3 \end{cases}$$

