PCST2 - ESCOM EXAMEN DE MATHEMATIQUES DU 19/05/06 DE 9h à12h

Les calculatrices et les documents sont interdits.

Il sera tenu compte de la présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements. Les candidats sont invités, dans la mesure du possible, à **encadrer** les résultats.

EXERCICE 1

Soit l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{x^2(x^2-1)}{(x^2+1)^2(x^4+x^2+1)}dx$.

Calculer I au moyen du changement de variable $t = x + \dfrac{1}{x}$.

Indication : calculer t^2, ne pas chercher à calculer x en fonction de t.

EXERCICE 2

Soit un champ de vecteurs $V(x,y)$ défini sur le plan, muni d'un repère orthonormé, comme suit :

$$V(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{-(x+1)}{((x+1)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{(x-1)}{((x-1)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \dfrac{-y}{((x+1)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{y}{((x-1)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}$$

On notera que $((x+1)^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ et $((x-1)^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ désignent respectivement la distance du point de coordonnées $(-1,0)$ au point de coordonnées (x,y) et du point $(1,0)$ au point de coordonnées (x,y).

1) A quelle condition V est-il aussi un champ de gradients ?

2) Montrer que V est effectivement un champ de gradients.

3) Montrer qu'un potentiel $P(x,y)$) associé au champ de gradients V est donné par :

$$P(x,y) = \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}$$

4) Montrer que le point de coordonnées (0,0) est un point critique de P.

5) Quelle est la nature du point de coordonnées (0,0) ?

EXERCICE 3

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique du R-espace vectoriel R^3. Soit f l'endomorphisme de R^3 défini par :

$$\begin{cases} f(e_1) = e_3 \\ f(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3 \\ f(e_3) = e_3 \end{cases}$$

1) Ecrire la matrice A de f dans la base canonique.

2) Déterminer le noyau $N(f)$ de f. f est-elle bijective ? ../..

3) On pose,

$$\begin{cases} v_1 = e_1 - e_3 \\ v_2 = e_1 - e_2 \\ v_3 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$

a) Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Calculer $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ en fonction de $\{v_1, v_2, v_3\}$.

c) En déduire la matrice B de f dans la nouvelle base (v_1, v_2, v_3).

EXERCICE 4

On considère l'endomorphisme f du R-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, représenté relativement à la base canonique (e_1, e_2, e_3) par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

1)a) Déterminer le polynôme caractéristique $p_A(\lambda)$ de la matrice A.En déduire que A possède la valeur propre simple $\lambda_1 = -2$ et la valeur propre double $\lambda_2 = 1$.

b) Déterminer un vecteur propre u_1 associé à λ_1, ayant 1 pour troisième composante.

c) On considère le vecteur $u_3 = (1,1,-8)$.Démontrer que,

$$u_2 = A(u_3) - u_3$$

est un vecteur propre associé à λ_2.

d) Démontrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

2)a) Ecrire la matrice B de f relativement à la base $(u_1, u_2\ u_3)$.

b) Déterminer les matrices de passage P et P^{-1} telles que : $B = P^{-1}AP$.
En déduire A en fonction de B.

3) Soient y_1, y_2, y_3 trois fonctions numériques, de la variable t, dérivables.
Soit le système différentiel,

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = 3y_1 + y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -4y_1 - y_2 \\ \dfrac{dy_3}{dt} = 4y_1 - 8y_2 - 2y_3 \end{cases} \qquad (S)$$

a) On pose $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$.Donner une écriture matricielle de (S).

b) Résoudre le système (S) au moyen du changement de fonctions : $\vec{z} = P^{-1}(\vec{y})$ avec $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$.