L1 MIPI
20 Mai 2015

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

Examen de Polynômes et Suites

Durée: 3h. Aucun document ni calculatrice autorisé. Téléphones portables INTERDITS.
Tout résultat non justifié sera considéré comme faux.
Le barème suivant est donné à titre <u>indicatif</u> : $3 + 5 + 3 + 5 + 4 = 20$.
La feuille Annexe est A RENDRE AVEC LA COPIE.

Questions de cours.
a) Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels et $\ell \in \mathbb{R}$. Rappeler la **définition** de $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
b) Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels. Rappeler la définition de "la série $\sum u_n$ converge".
c) Démontrer que "Si la série $\sum u_n$ converge alors la suite $(u_n)_n$ tend vers 0" et donner un contre-exemple à la réciproque.

Exercice 1. Le but de cet exercice est de décomposer en produit de facteurs irréductibles le polynôme

$$P(X) = X^6 - 2X^5 - 3X^4 + 8X^3 + 12X^2 - 32X + 16.$$

a) Calculer les polynômes P' et P''. Montrer que 1 est racine double de P mais pas racine triple.
b) Effectuer la division euclidienne de P par $(X-1)^2 = X^2 - 2X + 1$ et déterminer $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X-1)^2 \times Q$.
c) On considère les nombres complexes $z_1 = 2 + i2\sqrt{3}$ et $z_2 = 2 - i2\sqrt{3}$.

i) Mettre z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
ii) Déterminer les racines carrées complexes de z_1 et de z_2. On les cherchera d'abord sous forme exponentielle puis on les donnera sous forme algébrique.
iii) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 4z + 16 = 0$. En déduire les racines, dans $\mathbb{C}$, du polynôme $X^4 - 4X^2 + 16$.

d) En déduire la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles d'abord dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

N.B.: On rappelle les valeurs suivantes de sin et cos: $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$,

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exercice 2.
a) Calculer les limites des suites de terme général $u_n = \dfrac{2\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+3}$ et $v_n = \dfrac{n^2+\cos(n)}{n^2+3n+1}$.
b) Montrer que la suite de terme général $w_n = \dfrac{(-1)^n \times n}{n+1}$ n'a pas de limite.

TSVP

Exercice 3. On souhaite étudier, en fonction des valeurs de u_0, la suite définie par récurrence

$$u_{n+1} = u_n \exp\left(\frac{2-u_n}{4}\right), \qquad u_0 \geq 0,$$

où $\exp$ désigne la fonction exponentielle.

1. Etude d'une fonction.

a) Donner la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$, et vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq 0$.

b) Montrer que la fonction f possède exactement deux points fixes que l'on déterminera.

c) Etudier rapidement la fonction f (dérivée, sens de variation, limite en $+\infty$) et tracer son graphe **sur la feuille Annexe**.

d) Représenter, **toujours sur la feuille Annexe**, à l'aide d'une toile d'araignée les termes u_0, u_1, u_2 et u_3 pour chacune des valeurs de u_0 suivantes: 1, 2, 4, 5 et 8.

2. Etude de la suite $(u_n)_n$ lorsque $0 \leq u_0 \leq 4$.

a) Etudier la suite $(u_n)_n$ lorsque $u_0 = 0$ et lorsque $u_0 = 2$.

b) On suppose dans ce qui suit que $u_0 \neq 0$ et $u_0 \neq 2$.

$i)$ Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq u_n \leq 4$.

$ii)$ Montrer que si $0 < u_0 < 2$ la suite est strictement croissante, et que si $2 < u_0 < 4$ la suite est strictement décroissante. Indication: quel est le sens de variation de la fonction f sur $[0, 4]$.

$iii)$ En déduire que pour tout u_0 la suite converge et déterminer sa limite.

3. Etude de la suite $(u_n)_n$ lorsque $u_0 > 4$.

a) Montrer que $0 < u_1 < 4$.

b) En utilisant les résultats de la question 2. déterminer le comportement de la suite $(u_n)_n$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 4. Soient u_0 et v_0 deux nombres tels que $0 < u_0 < v_0$. On définit les suites u et v par $u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 < u_n < v_n$. On pourra raisonner par récurrence.

b) Montrer que la suite u est croissante et que la suite v est décroissante.

c) En déduire que les suites u et v convergent. On note ℓ la limite de u et ℓ' celle de v.

d) Montrer que $\ell = \ell'$.

e) Montrer que la suite $(u_n v_n)_n$ est constante. En déduire la valeur de ℓ en fonction de u_0 et v_0.

f) On prend $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$.

$i)$ Calculer v_1, u_1, v_2 puis u_2 sous forme de fractions irréductibles. Que vaut $v_2 - u_2$?

$ii)$ En déduire une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-2} près. Justifier votre réponse.

L1 MIPI
Numéro de copie:.............

Examen de Polynômes et Suites: Feuille Annexe