L1 MIPI
20 Mai 2015

Corrigé de l'examen de Polynômes et Suites

Questions de cours.
a) Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n - \ell| < \epsilon.$$

b) Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels. On dit que la série $\sum u_n$ converge si la suite $(U_n)_n$ des sommes partielles, définie par $U_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, converge, i.e. a une limite finie.
c) On suppose que la série $\sum u_n$ converge. Soit $n \geq 1$. On écrit

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} u_k + u_n = U_{n-1} + u_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad u_n = U_n - U_{n-1}.$$

La série converge signifie que la suite $(U_n)_n$ converge vers un certain ℓ, et donc on a aussi $U_{n-1} \to \ell$. Ainsi $u_n = U_n - U_{n-1} \to \ell - \ell = 0$.
La réciproque est fausse. Si on prend $u_n = \frac{1}{n}$, on a $u_n \to 0$ mais $\sum u_n$ diverge.

Exercice 1.
a) On calcule

$$P'(X) = 6X^5 - 10X^4 - 12X^3 + 24X^2 + 24X - 32 \text{ et } P''(X) = 30X^4 - 40X^3 - 36X^2 + 48X + 24.$$

On vérifie alors facilement que $P(1) = P'(1) = 0$ donc 1 est racine au moins double de P, par contre $P''(1) = 26 \neq 0$ ce qui prouve que 1 est racine double mais pas racine triple de P.
b) On effectue la division euclidienne de P par $X^2 - 2X + 1$

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
X^6 & -2X^5 & -3X^4 & +8X^3 & +12X^2 & -32X & +16 & X^2 - 2X + 1 \\ \cline{8-8}
-X^6 & +2X^5 & -X^4 & & & & & X^4 - 4X^2 + 16 \\ \cline{1-3}
 & & -4X^4 & +8X^3 & +12X^2 & -32X & +16 & \\
 & & +4X^4 & -8X^3 & +4X^2 & & & \\ \cline{3-5}
 & & & & 16X^2 & -32X & +16 & \\
 & & & & -16X^2 & +32X & -16 & \\ \cline{5-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Le polynôme Q tel que $P = (X-1)^2 \times Q$ est donc $Q(X) = X^4 - 4X + 16$.
c) $i)$ Pour mettre z_1 et z_2 sous forme exponentielle, on calcule d'abord leur module. On a

$$|z_1| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4.$$

On écrit ensuite $z_1 = 4\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et un argument de z_1 est un nombre θ tel que $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. On trouve $\theta = \frac{\pi}{3}$ d'où $z_1 = 4\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$.
On procède de même pour z_2, ou on remarque que c'est le conjugué de z_1, et on obtient $z_2 = 4\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$.

$ii)$ On commence par déterminer les racines carrées de z_1. On les cherche sous forme exponentielle. Si $z = r\mathrm{e}^{i\alpha}$ avec $r \geq 0$, on a $z^2 = z_1$ si et seulement si

$$r^2\mathrm{e}^{i2\alpha} = 4\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} r^2 & = & 4,\ r \geq 0, \\ 2\alpha & = & \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} r & = & 2, \\ \alpha & = & \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

On trouve ainsi que les deux racines carrées complexes de z_1 sont $w_1 = 2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$ et $w_2 = 2\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{6}}$. Sous forme algébrique on obtient $w_1 = \sqrt{3} + i$ et $w_2 = -\sqrt{3} - i = -w_1$.

On procède de même pour les racines de z_2 et on trouve $w_3 = 2\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $w_4 = 2\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{6}}$. Sous forme algébrique on obtient $w_3 = \sqrt{3} - i$ et $w_4 = -\sqrt{3} + i = -w_3$.

$iii)$ Le discriminant de l'équation $z^2 - 4z + 16 = 0$ est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 16 = -48 < 0$ donc les racines de cette équation sont complexes, et conjuguées. On a $\sqrt{-\Delta} = 4\sqrt{3}$ et on en déduit que les racines de l'équation sont $\dfrac{4 + i4\sqrt{3}}{2} = z_1$ et $\dfrac{4 - i4\sqrt{3}}{2} = z_2$.

Par définition w est racine de $X^4 - 4X^2 + 16$ ssi $w^4 - 4w^2 + 16 = 0$, i.e. ssi w^2 est racine de l'équation $z^2 - 4z + 16 = 0$ et donc ssi $w^2 = z_1$ ou $w^2 = z_2$. Autrement dit les racines de $X^4 - 4X^2 + 16$ sont les racines carrées de z_1 et de z_2, c'est-à-dire les nombres w_1, w_2, w_3 et w_4.

d) Dans $\mathbb{C}[X]$ les facteurs irréductibles sont tous de degré 1. Il faut donc déterminer les racines de P. D'après b) on a $P(X) = (X-1)^2(X + 4 - 4X + 16)$ et d'après c)iii) les racines de $X^4 - 4X^2 + 16$ sont w_1, w_2, w_3 et w_4. On en déduit que

$$P(X) = (X-1)^2(X - \sqrt{3} - i)(X + \sqrt{3} + i)(X - \sqrt{3} + i)(X + \sqrt{3} - i).$$

Pour obtenir la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ on regroupe ensemble les facteurs correspondant à des racines complexes conjuguées, ici w_1 et w_3 d'un côté et w_2 et w_4 de l'autre. Au final on obtient

$$P(X) = (X-1)^2(X^2 - 2\sqrt{3}X + 4)(X^2 + 2\sqrt{3}X + 4).$$

Exercice 2.

a) $i)$ On écrit

$$u_n = \frac{2\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n} + 3} = \frac{\sqrt{n}\left(2 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(1 + \frac{3}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{2 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{3}{\sqrt{n}}}.$$

Comme $\lim \sqrt{n} = +\infty$ on a $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \lim \dfrac{3}{\sqrt{n}} = 0$ et donc $\lim u_n = 2$.

$ii)$ En mettant en facteur n^2 au numérateur et au dénominateur on a

$$v_n = \frac{1 + \frac{\cos(n)}{n^2}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}.$$

On a $\lim \dfrac{3}{n} = \lim \dfrac{1}{n^2} = 0$. Par ailleurs, pour tout n, $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ donc $-\frac{1}{n^2} \leq \frac{\cos(n)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$. En utilisant le théorème des gendarmes on en déduit que $\lim \frac{\cos(n)}{n^2} = 0$ et donc finalement $\lim v_n = 1$.

b) On a $w_{2n} = \dfrac{2n}{2n+1} = \dfrac{2}{2 + \frac{1}{n}} \to 1$ et $w_{2n+1} = -\dfrac{2n+1}{2n+2} = -\dfrac{2 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{2}{n}} \to -1$. La suite $(w_n)_n$ possède deux sous-suites qui ont des limites différrantes donc la suite $(w_n)_n$ n'a pas de limite.

Exercice 3. 1. Etude d'une fonction.
a) Si on prend la fonction f définie sur $D = [0, +\infty[$ par $f(x) = x \exp\left(\frac{2-x}{4}\right)$ on a bien $u_{n+1} = f(u_n)$. Comme une exponentielle est toujours positive on a $f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$, i.e. $f(D) \subset D$. Si $u_0 \in D$ on aura donc bien $u_n \in D$ pour tout n, c'est-à-dire $u_n \geq 0$.
b) Par définition $x \in D$ est point fixe de f ssi $f(x) = x$. On résout donc

$$f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad x \exp\left(\frac{2-x}{4}\right) - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\left[\exp\left(\frac{2-x}{4}\right) - 1\right] = 0.$$

On en déduit que soit $x = 0$ soit

$$\exp\left(\frac{2-x}{4}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2-x}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2.$$

La fonction f a donc deux points fixes: 0 et 2.
c) La fonction f est dérivable sur D comme produit et composée de fonctions dérivables, et on a

$$f'(x) = \left(1 - \frac{x}{4}\right) \times \exp\left(\frac{2-x}{4}\right).$$

Comme l'exponentielle est toujours positive on obtient que $f'(x) > 0$ ssi $0 < x < 4$ et donc f est strictement croissante sur $[0, 4]$ et décroissante sur $[4, +\infty[$. Par ailleurs $f(0) = 0$ et, par croissances comparées, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Graphe: voir feuille Annexe.

d) Voir la feuille Annexe

2. Etude de la suite $(u_n)_n$ lorsque $0 \leq u_0 \leq 4$.
a) Puisque 0 et 2 sont les points fixes de f, la suite $(u_n)_n$ est constante égale à 0 lorsque $u_0 = 0$ et constante égale à 2 lorsque $u_0 = 2$.
b) $i)$ On sait déjà que $u_n \geq 0$ (cf question 1.a)). Par ailleurs, l'étude de la fonction f montre que pour tout x on a $f(x) \leq f(4) = 4\exp(-\frac{1}{2}) < 4$. Donc si $n \geq 1$ on a $u_n = f(u_{n-1}) < 4$.

$ii)$ La fonction f est croissante sur $[0, 4]$ et d'après $i)$ on a $u_n \in [0, 4]$ pour tout n. D'après un résultat du cours on sait que la suite $(u_n)_n$ est monotone. Elle est strictement croissante si $u_0 < u_1$ et strictement décroissante si $u_0 > u_1$. On calcule donc

$$u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 = u_0\left[\exp\left(\frac{2-u_0}{4}\right) - 1\right].$$

Si $0 < u_0 < 2$ on a $\dfrac{2-u_0}{4} > 0$, donc $\exp\left(\dfrac{2-u_0}{4}\right) > 1$ et ainsi $u_1 > u_0$: la suite $(u_n)_n$ est strictement croissante.

Si $2 < u_0 < 4$ on a $\dfrac{2-u_0}{4} < 0$, donc $\exp\left(\dfrac{2-u_0}{4}\right) < 1$ et ainsi $u_1 < u_0$: la suite $(u_n)_n$ est strictement décroissante.

$iii)$ On commence par le cas $0 < u_0 < 2$. La suite $(u_n)_n$ est croissante d'après $ii)$ et majorée (par 4) d'après $i)$, donc elle converge et sa limite ℓ vérifie $\ell \leq 4$ et $\ell > u_0 > 0$ (la suite est croissante). Par ailleurs la fonction f est continue donc ℓ est un point fixe de f: $\ell = 0$ ou $\ell = 2$. Comme $\ell > 0$ on a $\ell = 2$.

Si maintenant $2 < u_0 < 4$, la suite est décroissante et minorée (par 0) donc elle converge. A nouveau sa limite est un point fixe de f. Pour pouvoir déterminer si c'est 0 ou 2 on va montrer que $(u_n)_n$ est en fait minorée par 2. On procède par récurrence. Soit donc P_n la proposition "$u_n > 2$".

- *Initialisation.* Par hypothèse $u_0 > 2$ donc P_0 est vraie.

- *Hérédité*. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que P_n est vraie, on a donc $2 < u_n$ et par ailleurs $u_n \leq 4$ d'après $i)$. Comme f est strictement croissante sur $[0, 4[$ on a $f(2) < f(u_n)$, i.e. $2 < u_{n+1}$ donc P_{n+1} est vraie.

Le principe de récurrence permet d'affirmer que P_n est vraie pour tout n. La suite $(u_n)_n$ est donc minorée par 2 et donc sa limite ℓ est supérieure ou égale à 2, c'est donc 2.

Conclusion: quelque soit u_0 non nul la suite $(u_n)_n$ tend vers 2.

3. Etude de la suite $(u_n)_n$ lorsque $u_0 > 4$.

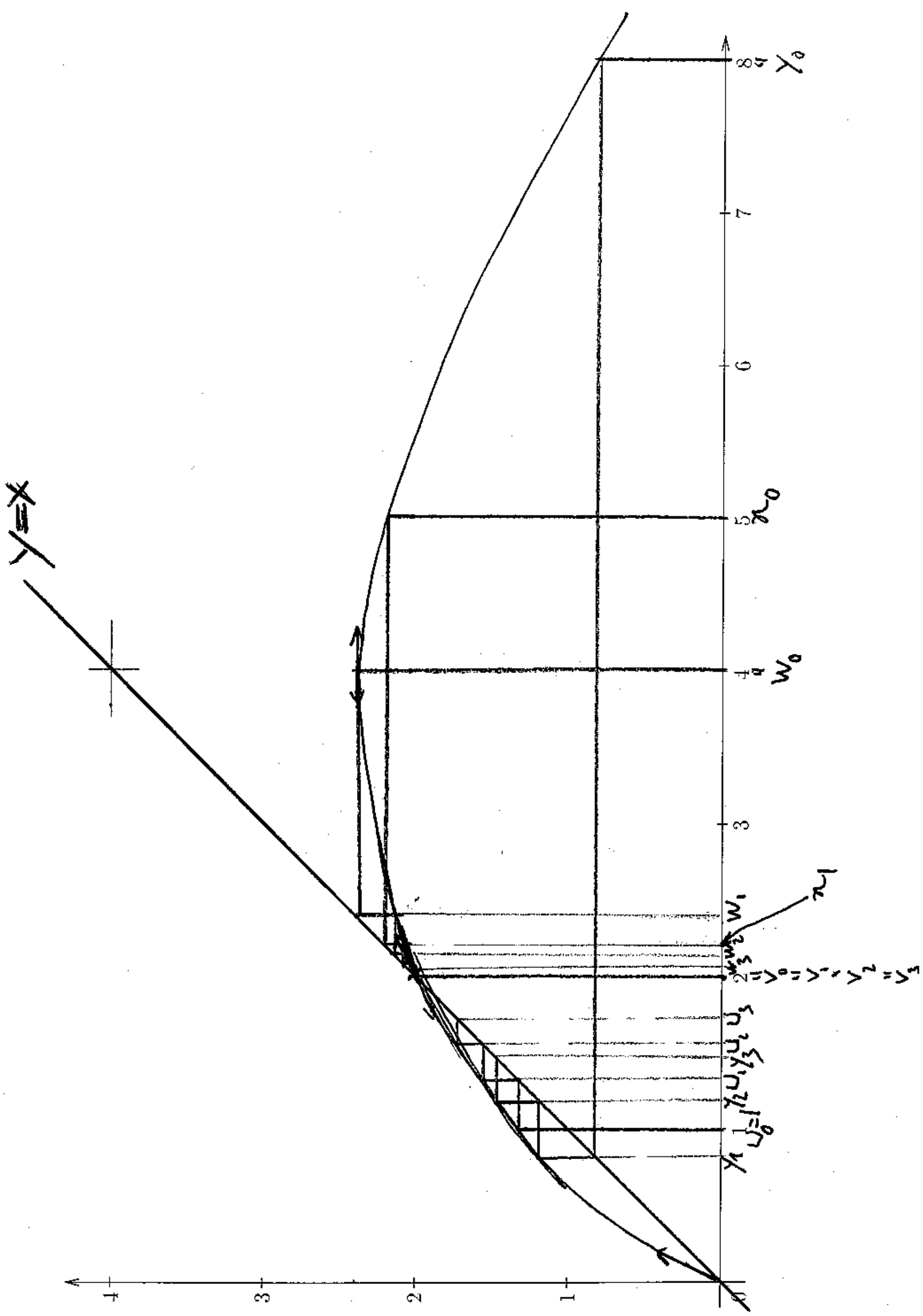
a) L'étude de la fonction f donne directement $u_1 = f(u_0) \leq f(4) < 4$. Par ailleurs $f(x) = 0$ ssi $x = 0$ donc $u_1 = f(u_0) > 0$ (on sait que $u_1 \geq 0$ d'après 1.a)).

b) Si on considère la suite $v_n = u_{n+1}$, elle vérifie la relation de récurrence $v_{n+1} = f(v_n)$ et $v_0 = u_1 \in]0, 4[$. D'après 2. la suite v tend vers 2 et donc la suite u également.

L1 MIPI
Numéro de copie:.............

UNIVERSITÉ
de Cergy-Pontoise

Examen de Polynômes et Suites: Feuille Annexe



Exercice 4. Soient u_0 et v_0 deux nombres tels que $0 < u_0 < v_0$. On définit les suites u et v par $u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition P_n: "$0 < u_n < v_n$".

- *Initialisation.* Par hypothèse $0 < u_0 < v_0$ donc P_0 est vraie.
- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que P_n est vraie, on a donc $0 < u_n < v_n$. On a donc $u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n+v_n} > 0$ (produit, somme et quotient de nombres strictement positifs). Par ailleurs

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} = \frac{(u_n + v_n)^2 - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)} = \frac{u_n^2 + v_n^2 - 2u_n v_n}{2(u_n + v_n)} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} > 0.$$

On a bien $0 < u_{n+1} < v_{n+1}$ et donc P_{n+1} est vraie.

Le principe de récurrence permet d'affirmer que P_n est vraie pour tout n.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, d'après a),

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} - u_n = \frac{2u_n v_n - u_n^2 - u_n v_n}{u_n + v_n} = \frac{u_n(v_n - u_n)}{u_n + v_n} > 0$$

et

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} < 0.$$

La suite u est donc strictement croissante et la suite v strictement décroissante.

c) D'après b) on a $u_0 < u_n$ pour tout n et $v_n < v_0$ pour tout n. Donc en utilisant a) on obtient que pour tout n:

$$u_0 < u_n < v_n < v_0.$$

La suite u est donc croissante et majorée (par v_0) donc elle converge. De même la suite v est décroissante et minorée (par u_0) donc elle converge.

d) On a $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$. Les propriétés sur les limites permettent d'affirmer que $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \to \frac{\ell+\ell'}{2}$. Or $v_{n+1} \to \ell'$ donc par unicité de la limite on a $\frac{\ell+\ell'}{2} = \ell'$, i.e. $\ell = \ell'$.

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_{n+1}v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \times \frac{u_n + v_n}{2} = u_n v_n.$$

Donc la suite $(u_n v_n)_n$ est constante.

On en déduit que pour tout n on a $u_n v_n = u_0 v_0$. Or $u_n v_n \to \ell^2$ donc $\ell^2 = u_0 v_0$. Puisque $u_n > 0$ pour tout n on a $\ell \geq 0$ et donc $\ell = \sqrt{u_0 v_0}$.

f) On prend $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$.

$i)$ On calcule facilement que $v_1 = \frac{3}{2}$. Comme $u_1 v_1 = u_0 v_0 = 2$ on a $u_1 = \frac{4}{3}$. On calcule ensuite $v_2 = \frac{17}{12}$ et $u_2 = \frac{24}{17}$. On obtient ainsi $v_2 - u_2 = \frac{17}{12} - \frac{24}{17} = \frac{17^2 - 12\times 24}{12\times 17} = \frac{1}{204}$.

$ii)$ La limite commune des suites u et v est ici $\ell = \sqrt{u_0 v_0} = \sqrt{2}$. Puisque u est croissante et v est décroissante on a $u_n \leq \ell \leq v_n$ pour tout n. Comme $v_2 - u_2 < 10^{-2}$ on en déduit que $u_2 = \frac{24}{17}$ (ou $v_2 = \frac{17}{12}$) est une valeur approchée de $\ell = \sqrt{2}$ à 10^{-2} près.