L1-S2 - 2013/2014 - **Examen du 16 juin 2014** - Session 2

Examen de Mathématiques pour les Sciences (MS2)

Durée: **2** heures

Les documents, les calculatrices, les téléphones portables, smartphones, tablettes ne sont pas autorisés

Le barme est donné à titre indicatif

Exercice 1 : (4 points)

1. Mettre le polynôme $P = X^2 - 2X + 2$ sous la forme $(aX + b)^2 + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ à trouver.
2. Trouver les racines de P. Calculer l'expression du polynôme dérivé P'.
3. Se servir des questions précédentes pour calculer la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x$.

[Indication: on pourrait mettre le polynôme 2X+1 sous forme d'une expression ne dépendant que de P'].

Exercice 2 : (5 points)

1. Exprimer la dérivée $\tan'$ de la fonction tangente en termes de tan (seulement). En déduire les primitives de $x \mapsto \tan^2 x$.
2. Calculer les primitives de $x \mapsto \cos(2x)$.
3. Utiliser les questions précédentes pour déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos(2x)\tan^2 x\,\mathrm{d}x$.

   [Indication: on pourrait utiliser la formule reliant $\cos(2x)$ à $\cos^2 x$ et/ou $\sin^2 x$]

Exercice 3 : (5 points)

On veut trouver l'ensemble des fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifient l'équation différentielle non-normalisée du premier ordre $(\mathcal{E})$: $\sqrt{1+x^2}\,y' - x\,y = \mathrm{e}^{\sqrt{1+x^2}}$.

1. Soit (E): $y' - \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,y = \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}}$ l'équation normalisée attachée à $(\mathcal{E})$. Justifier pourquoi les équations $(\mathcal{E})$ et (E) ont le même ensemble de solutions.
2. Soit (E_0): $y' - \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,y = 0$ l'équation sans second membre attachée à (E). Trouver l'ensemble des solutions y_0 de (E_0).
3. Trouver une solution particulière de (E) par la méthode de la variation de la constante.

   [On rappelle que la primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ est $x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2})$]
4. En déduire l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$.

Exercice 4 : (6 points)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie en chaque $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2 + 4x + 8$. Notons par G_f le graphe de f, défini par $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } z = f(x, y)\}$.

1. Calculer les dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ de f en chaque point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Vérifier que le point $M(-1, 1, 5) \in \mathbb{R}^3$ appartient au graphe de f et donner l'équation du plan tangent au graphe G_f en ce point.
3. Trouver les points critiques de f et calculer la valeur de f en ces points.
4. Mettre f sous la forme d'une somme de trois carrés: $f(x, y) = (ax+by)^2+(cx+d)^2+\lambda^2$ avec $a, b, c, d, \lambda \in \mathbb{R}$ constantes à trouver.
5. En déduire la courbe de niveau $z = 4$ pour f.
6. Utiliser cette forme de somme de trois carrés pour étudier f autour de ses points critiques: décider pour un tel point si f admet un extremum (minimum ou maximum) local ou bien s'il s'agit d'un point de col (ou point-selle). Les extrema trouvés sont-ils globaux?