L1-MS2 - 2013/2014 - **Examen du 15 mai 2014** - Session 1

Examen de Mathématiques pour les Sciences (MS2)

Durée: **3** heures – Les documents, les calculatrices, les téléphones, smartphones et tablettes ne sont pas autorisés

---

Exercice 1 : **1.a)** Soit $P(X) = X^4 - X^2 - 2$. Factoriser P en polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$. (Indication: on pourrait vérifier qu'il admet comme racines $\pm\sqrt{2}$ et en déduire les factorisations demandées).

1.b) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $\dfrac{X}{X^4 - X^2 - 2}$.

1.c) En déduire la valeur de l'intégrale: $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^4 - x^2 - 2}\,\mathrm{d}x$.

2) Calculer les primitives suivantes:

2.a) $F(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{\tan x}{1 + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x$, sur $\left] -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right[$. (Indication: règles de Bioche)

2.b) $I(t) = \displaystyle\int_1^t \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ puis $J(t) = \displaystyle\int_{\mathrm{e}^{-1}}^t \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$, sur $]0, \infty[$. (Indication: IPP)

Exercice 2 : On veut résoudre l'équation différentielle *réelle*:

$$y'' - y' - 2y = (x+1)\mathrm{e}^{-x}. \qquad \text{(E)}$$

1) Résoudre l'équation différentielle homogène attachée à (E), à savoir:

$$y'' - y' - 2y = 0. \qquad (\mathrm{E}_0)$$

Présenter l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de (E_0) sous la forme d'un espace vectoriel dont on précisera la dimension.

2) Trouver une solution particulière réelle (qu'on notera y_p) de l'équation différentielle (E).

3) En déduire l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E).

Exercice 3 : Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xy^2\mathrm{e}^{x-y}$.

1) Ses dérivées partielles (notées par $\partial_x f \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$ et $\partial_y f \equiv \frac{\partial f}{\partial y}$) étant définies sur $\mathbb{R}^2$, calculer leur expression en un point arbitraire $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2) Calculer $f(1,1)$ et donner l'équation du plan tangent au graphe de f au point $M(1,1,f(1,1))$.

3) Montrer que l'ensemble des points critiques de f est $\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid \forall x \in \mathbb{R}\} \cup \{(-1,2)\}$.

4) Calculer $f(0,0)$ et montrer que $(0,0)$ est un point de selle pour f. (Indication: on pourra étudier la fonction $t \mapsto g(t) = f(t,t)$ autour du point $t = 0$).

5) On se propose d'étudier la nature des autres points critiques du type $(x,0) \in \mathbb{R}^* \times \{0\}$:

5.a) Montrer que $(-1,0)$ est un maximum local pour f. Montrer que la même assertion est vraie pour tous les points $(x,0)$ avec $x < 0$.

5.b) Montrer que $(1,0)$ est un minimum local pour f. Montrer que la même assertion est vraie pour tous les points $(x,0)$ avec $x > 0$.

6) Calculer $f(-1,2)$. Dans la suite, nous allons admettre que $(-1,2)$ est un minimum local de f. La fonction f a-t-elle des extrema (minimum ou maximum) globaux sur son domaine de définition ?

Exercice 4 : Montrer que pour toute paire d'entiers positifs $(n,p) \in \mathbb{N}^{*2}$ on a :

$$\int_0^1 x^n(1-x)^p\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^p(1-x)^n\,\mathrm{d}x.$$

(Indication: changement de variable, suggéré par la forme similaire des deux expressions à intégrer)