L1 - S2 - 2013/2014 SESSION 2

EXAMEN DE MATHS POUR SCIENCES S2 (MS2)

CORRIGÉ de l'EXAMEN de 16.06.2014

EXERCICE 1 : (1) $P = (X^2-2X+1)+1 = (X-1)^2+1$.

(2) $P(x) = 0 \iff (x-1)^2 = -1 \iff x_{1,2} = 1 \pm i$; $P' = 2(X-1)$.

(3) Obs : les racines de $P(x) = x^2-2x+2$ étant purement complexes, la fraction à intégrer est déjà un "élément simple".

$$I = \int_0^1 \frac{P'(x)+3}{P(x)}dx = \int_0^1 \frac{P'(x)}{P(x)}dx + 3\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2+1}$$
$$= \left[\ln|P(x)|\right]_0^1 + 3\int_{-1}^0 \frac{dy}{y^2+1} = 2\left[\ln(P(x))\right]_0^1 + 3\left[\mathrm{Arctan}\, y\right]_{-1}^0$$
$$= (\ln 1 - \ln 2) + 3(\mathrm{Arctan}\,0 - \mathrm{Arctan}(-1))$$
$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{3}{4}\pi - \ln 2}$$

EXERCICE 2 : (1) $\tan' = 1 + \tan^2$, d'où

$$\int^t \tan^2 x\, dx = \int^t ((\tan x)' - 1)\, dx = \tan t - t + \lambda, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

(2) $$\int^t \cos(2x)\, dx = \frac{1}{2}\int^{2t} \cos y\, dy = \frac{1}{2}\sin(2t) + \lambda, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

(3) $$I = \int_0^{\pi/4} (-1 + 2\cos^2 x)\tan^2 x\, dx =$$
$$= -\int_0^{\pi/4} \tan^2 x\, dx + 2\int_0^{\pi/4} \cancel{\cos^2 x}\cdot\frac{\sin^2 x}{\cancel{\cos^2 x}}\, dx$$
$$\underset{(1)}{=} -\left[\tan x - x\right]_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4}(1-\cos(2x))\,dx =$$
$$\underset{(2)}{=} \left(\frac{\pi}{4} - 1\right) + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[\sin(2x)\right]_0^{\pi/4} \Rightarrow \boxed{I = \frac{\pi - 3}{2}}$$

Obs : On aurait pu utiliser (1) et proceder par IPP:

$$I = \int_0^{\pi/4} \cos(2x)(\tan x)'\,dx - \int_0^{\pi/4} \cos(2x)\,dx \underset{\text{IPP}}{=}$$
$$= \left[\cos(2x)\tan x\right]_0^{\pi/4} + 2\int_0^{\pi/4} \sin(2x)\tan x\, dx - \frac{1}{2}\left[\sin(2x)\right]_0^{\pi/4}$$
etc....

EXERCICE 3 : (1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 \geq 1$ donc $\sqrt{1+x^2} \geq 1 > 0$ donc $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ est définie $\forall x \in \mathbb{R}$.

En divisant $(\mathcal{E})$ par $\sqrt{1+x^2}$ on obtient une équation équivalente (E), i.e. $(\mathcal{E})$ et (E) ont le m. ensemble de sol.

(2) (E_0) est du type $y' + ay = 0$ avec a intégrable (car continue sur $\mathbb{R}$) et cf. CM toute solution de celle-ci est

$$y_0(x) = \lambda \exp\left(-\int_0^x a(t)dt\right), \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Or $$-\int_0^x a(t)dt = \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{(1+t^2)'}{\sqrt{1+t^2}}dt =$$
$$= \int_0^x \left(\sqrt{1+t^2}\right)' dt = \sqrt{1+x^2} \underbrace{-1}_{\text{cte sans importance car englober ds } \lambda}.$$

D'où $$\boxed{y_0(x) = \lambda e^{+\sqrt{1+x^2}}, \forall x \in \mathbb{R}}$$

(3) Si y_0 est une solution de (E_0) on propose comme solution de (E) : $y = \lambda y_0$ où λ est une fonction C^1 inconnue. En remplaçant en (E) :

$$\lambda' y_0 + \lambda\underbrace{(y_0' + a y_0)}_{=0 \text{ par hypothèse.}} = \frac{e^{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}} \underset{\frac{1}{y_0}}{\iff} \lambda'(x) = \frac{e^{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}\cdot y_0(x)}$$

d'où, par intégration, on obtient

$$\lambda(t) \underset{(2)}{=} \int_0^t \frac{\cancel{e^{\sqrt{1+x^2}}}\,dx}{\sqrt{1+x^2}\cdot \cancel{e^{\sqrt{1+x^2}}}} = \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) + 0$$

Donc une sol. particulière de (E) est (par exemple) :

$$y_p(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) e^{\sqrt{1+x^2}}, \forall x \in \mathbb{R}$$

(4) L'ensemble des sol. de $(\mathcal{E}) \iff (E)$ est :

$$\mathcal{S} = \left\{y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y(x) = \left(\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + \lambda\right)e^{\sqrt{1+x^2}}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}\right\}$$

EXERCICE 4 :

(1) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(2x+y+2)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(x+y) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$

(2) $f(-1,1) = \cancel{2} - \cancel{2} + 1 - 4 + 8 = 5 \Rightarrow M(-1,1,5) \in G_f$

$z = f(x,y) = f(-1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(-1,1)(x-(-1)) + \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)(y-1)$

est l'equation du plan tangent à G_f en $M(-1,1,5)$,

i.e. $T_M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - z - 7 = 0\}$

(3) (x,y) est pt. critique (pour f) ssi $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ s'annullent en ce point. Dans notre cas, ceci équivaut à $\begin{cases} 2x + y = -2 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$

Il n'y a donc qu'un pt. critique : $(-2,2)$.

$f(-2,2) = 4$.

(4) $f(x,y) = (x^2 + 2xy + y^2) + (x + 4x + 4) + 4 =$

$= (x+y)^2 + (x+2)^2 + 2^2.$

(5) $f(x,y) = 4 \Leftrightarrow (x+y)^2 + (x+2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = -y$ et $x = -2 \Leftrightarrow x = -2$ et $y = 2$.

La courbe de niveau 4 est formé d'un seul point : $(-2,2)$.

(6) On a : $f(-2,2) = 4 \leq 4 + (x+2)^2 + (x+y)^2 = f(x,y)$

et ceci $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Donc en $(-2,2)$ f atteint un minimum local

(7) D'après (6), $f(-2,2) \leq f(x,y)$ $\underline{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2}$

donc le min est global.

Par contre, f n'a pas de points de maximum locaux (ni globaux) même si $\exists$ des suites (x_n, y_n) t.q. $f(x_n, y_n) \to +\infty$ quand $n \to \infty$.