L1 - MS2 - ANNÉE 2013 - 2014 - SEMESTRE 2 - SESS. 1

CORRIGÉ de l'EXAMEN de MATHS pour SCIENCES (15.05.2014)

EXERCICE 1 : (1.a) $P(X) = (X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})(X^2+1)$ sur $\mathbb{R}$
$= (X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})(X-i)(X+i)$ sur $\mathbb{C}$.

(1.b) Décomposition "à priori" $F(x) = \frac{x}{x^4-x^2-2} = \frac{a}{x-\sqrt{2}} + \frac{b}{x+\sqrt{2}} + \frac{cx+d}{x^2+1}$

$[(x \pm \sqrt{2})F(x)]_{x=\mp\sqrt{2}} = \begin{cases} b = 1/6 \\ a = 1/6 \end{cases}$ $(*)$

$F(0) = 0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-a+b) + d \underset{(*)}{\Rightarrow} d = 0$ $(**)$

$F(1) = -\frac{1}{2} \underset{(**)}{\overset{(*)}{=}} \frac{1}{6}\left(\frac{1}{1-\sqrt{2}} + \frac{1}{1+\sqrt{2}}\right) + \frac{c}{2} \iff c = -\frac{1}{3}$.

Donc $F(x) \equiv \frac{x}{x^4-x^2-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{2}} - \frac{x}{x^2+1}\right)$

(1.c) $I = \int_0^1 F(x)\,dx = \frac{1}{6}\left(\int_0^1 \frac{(x-\sqrt{2})'}{x-\sqrt{2}}dx + \int_0^1 \frac{(x+\sqrt{2})'}{x+\sqrt{2}}dx - \int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx\right)$

$= \frac{1}{6}\left(\ln|x-\sqrt{2}| + \ln|x+\sqrt{2}| - \ln(1+x^2)\right)_0^1 =$

$= \frac{1}{6}\left(\ln\left(\frac{2-x^2}{1+x^2}\right)\right)_0^1 = \frac{1}{6}\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln 2\right) \Rightarrow \boxed{I = -\frac{\ln 2}{3}}$

(2.a) On remarque que si $F(t) = \int_0^t f(x)\,dx$, l'expression $f(x)dx$ est invariante quand on change x en $-x$, mais aussi en $\pi \pm x$, donc par les règles de Bioche on propose le chmt. de variable $y = \cos(2x)$. On a :

$F(t) = \int_0^t \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x\,(1+\cos 2x)}dx = -\int_0^t \frac{(\cos 2x)'}{(1+\cos 2x)^2}dx =$

$= -\int_1^{\cos(2t)} \frac{dy}{(1+y)^2} = \left[\frac{1}{1+y}\right]_1^{\cos 2t} = \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1\right)\cdot\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{F(t) = \frac{(\tan t)^2}{2}}$.

(2.b) $I(t) = \int_1^t (\ln x)'\ln x\,dx \overset{\text{IPP}}{=} [(\ln x)^2]_1^t - I(t)$, d'où

$\boxed{I(t) = \frac{1}{2}(\ln t)^2}$

$J(t) = \int_{e^{-1}}^{t} \left(-\frac{1}{x}\right)'\ln x\,dx = -\left[\frac{\ln x}{x}\right]_{e^{-1}}^t + \int_{e^{-1}}^t \left(-\frac{1}{x}\right)'dx$

$J(t) = -\frac{\ln t + 1}{t} + \frac{\ln(e^{-1})+1}{e^{-1}} \Rightarrow \boxed{J(t) = -\frac{\ln t + 1}{t}}$.

EXERCICE 2 : (1) L'équation caractéristique attachée à (E_0) est $r^2 - r - 2 = 0 \iff (r+1)(r-2) = 0$.
Donc ~~toute~~ solution de (E_0) est du type $y_0(x) = \lambda e^{-x} + \mu e^{2x}$ d'où $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\{x \mapsto e^{-x} ; x \mapsto e^{2x}\} \underset{\text{e.v.}}{\subset} C^2(\mathbb{R})$.

(2) le membre de droite de (E) est du type $P(x)\cdot e^{mx}$ avec $m = -1 = r_1 \neq r_2 = 2$. Alors par un thm. du CM on sait que (E) admet une solution $y_p(x) = Q(x)e^{-x}$ où $Q \in \mathbb{R}[X]$ est t.q. $d^\circ Q = d^\circ P + 1 = 1 + 1 = 2$.
Soit $Q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ est à trouver en imposant à y_p de vérifier (E). Alors

$y_p'(x) = (-\alpha x^2 + (2\alpha - \beta)x + (\beta - \gamma))e^{-x}$

$y_p''(x) = (\alpha x^2 + (\beta - 4\alpha)x + (2\alpha - 2\beta + \gamma))e^{-x}$

d'où "y_p vérifie (E)" $\underset{\boxed{e^{x} \neq 0}}{\iff}$ $\forall x \in \mathbb{R}$,

$\left[\cancel{\alpha x^2} + (\cancel{\beta} - 4\alpha)x + (2\alpha - 2\beta + \cancel{\gamma})\right.$
$+ \cancel{\alpha x^2} + (\cancel{\beta} - 2\alpha)x + (\cancel{\gamma} - \beta)$
$\left. - \cancel{2\alpha x^2} - 2\beta x - \cancel{2\gamma}\right] e^{-x} = (x+1)e^{-x}$

$\underset{e^{-x} > 0\ \forall x}{\iff} (-6\alpha - 1)x + (2\alpha - 3\beta - 1) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\iff \alpha = -\frac{1}{6}$, $\beta = -\frac{4}{9}$ et γ quelconque, qu'on prendra $= 0$ car on cherche une sol. particulière.

Donc $\boxed{y_p(x) = -\frac{x}{18}(3x+8)e^{-x}}$

(3) L'ensemble de toutes les sol. de (E) est somme entre le vecteur $y_p \in C^2(\mathbb{R})$ et les vecteurs de $\mathcal{S}_0$:

$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \{y_p\} = \left\{y \in C^2(\mathbb{R}) \mid y(x) = \left(\lambda - \frac{x}{18}(3x+8)\right)e^{-x} + \mu e^{2x}\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$

EXERCICE 3 : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$:

① $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (x+1)y^2e^{x-y}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xy(2-y)e^{x-y}$.

② $f(1,1)=1$. L'éq. du plan tangent en $M(1,1,1)$ est :
$z = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\cdot(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\cdot(y-1)$, donc
$T = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x+y-z=2\}$.

③ (x,y) est pt. critique de f ssi $\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$
i.e. ssi (voir (1)) $\begin{cases}(x+1)y^2=0\\ \text{et}\\ xy(2-y)=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=-1 \text{ ou } y=0\\ \text{et}\\ x=0 \text{ ou } y=0 \text{ ou } y=2\end{cases}$

On remarque qu'on a l'alternative "$y=0$ et $y=0$" (qui veut dire : x quelconque et $y=0$) qui englobe toute les autres, sauf "$x=-1$ et $y=2$". Donc l'ens. des pts critiques est $\mathbb{R}\times\{0\}\cup\{(-1,2)\}$.

④ $f(0,0)=0$ et on remarque que dans l'expression de $f(x,y)$, la partie : $y^2e^{x-y}>0$ si $y\neq 0$ donc $f(x,y)$ change de signe (i.e. $\gtrless f(0,0)$) quand x change de signe autour de 0. Donc $(0,0)$ n'est pas un extremum de f, mais étant un pt. critique, il ne peut être qu'un pt. de selle.

⑤ Obs: Cf. ③, tous les pts. $(x,0)$ sont des pts. critiques. Il faut décider s'ils sont des extremas ou des pts. de selle :

5.a Comme à ④, $\forall y\in\mathbb{R}^*$: $y^2e^{x-y}>0$, mais si $x_0=-1$, dans un voisinage de celui-ci on aura des $x<0$ donc dans un voisinage suffisamment petit de $(-1,0)$ on a $f(x,y) = x\cdot(\underbrace{y^2e^{x-y}}_{\geq 0}) \leq 0 = f(-1,0)$.
La même chose se passe si on remplace -1 par tout point $x_0<0$: $\forall x\in\left]x_0-\frac{|x_0|}{2}, x_0+\frac{|x_0|}{2}\right[$ on a $x<0$, d'où $f(x,y)=x(y^2e^{x-y})\leq 0 = f(x_0,0)$.
Conclusion : $\forall x<0$, les points $(x,0)$ sont des points de maximum (non-strict) de f.

5.b On fait un raisonnement analogue : $\forall x_0>0$: $\forall x\in\left]x_0-\frac{x_0}{2}, x_0+\frac{x_0}{2}\right[$, $f(x,y) = \underbrace{x}_{>0}\cdot(\underbrace{y^2e^{x-y}}_{\geq 0}) \geq 0 = f(x_0,0)$ donc tous les pts $(x_0,0)$ avec $x_0>0$ sont des minima (non-stricts) de f.

⑥ $f(-1,2) = -4e^{-3} < 0 = f(x,0)$ $\forall x\in\mathbb{R}$.
En admettant que $(-1,2)$ f admet un minimum, celui-ci est plus petit donc que la valeur que f atteint dans les autres minimas (les pts de $\mathbb{R}_+^*\times\{0\}$) et pourtant $(-1,2)$ n'est pas un minimum global de f. En effet, le domaine de f est $\mathbb{R}^2$ (non-borné) et si $x_0<0$ est fixé, on a $\lim_{y\to+\infty} f(x,y) = -\infty$ donc $\exists (x,y)\in\mathbb{R}^2$ t.q. $f(x,y) < f(-1,2)$. De même, pour $y_0\in\mathbb{R}$ fixé, $\lim_{x\to+\infty} f(x,y) = +\infty$ donc $\exists (x,y)\in\mathbb{R}^2$ t.q. $f(x,y) > f(\alpha,0)$ avec $\alpha<0$. Donc il n'y a ~~ni~~ de min ni de max global de f sur $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE 4 : On pose $y=1-x$, donc $dy=-dx$
$\int_0^1 x^n(1-x)^p\,dx = -\int_1^0 (1-y)^n y^p\,dy \overset{\text{on re-note } y \text{ en } x}{=} \int_0^1 x^p(1-x)^n\,dx$.