L1-MS2 - 2012/2013 - **Examen du 18 juin 2013** - Session 2

Examen de Mathématiques pour les Sciences (MS2)

Durée: **2** heures

Les documents, les calculatrices, les téléphones portables, smartphones, tablettes ne sont pas autorisées

---

Exercice 1 : 1. Factoriser sur $\mathbb{R}$ le polynôme $X^4 - 16$.

2. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $\dfrac{X^4-1}{X^4-16}$ (mettre en évidence aussi sa partie entière).
3. En déduire la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^4-1}{x^4-16}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 : 1. Exprimer la dérivée $\tan'$ de la fonction tangente en termes de $\tan$ (seulement).

2. Utiliser cette formule pour déduire, suite une intégration par parties, la valeur de

$$I = \int_0^{\pi/4} \sin x \tan^2 x \,\mathrm{d}x.$$

Exercice 3 : On veut trouver l'ensemble de fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifient l'équation différentielle d'ordre 1 :

$$(\mathrm{E}) \qquad y' + (\sin^2 x)y = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\sin x \cos x}$$

1. Si (E_0) est l'équation sans second membre attachée à (E), trouver l'ensemble des solutions y_0 de (E_0).
2. Trouver une solution particulière de (E) par la méthode de la variation de la constante.
3. En déduire la solution générale de (E).

Exercice 4 : Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = (x^2+y^2)\mathrm{e}^{x+y}$. Notons par G_f le graphe de f, défini par $G_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } z = f(x,y)\}$.

1. Tracer dans le plan la courbe de niveau $z = 0$ pour f. Expliquer la figure.
2. Calculer les dérivées partielles de f (qu'on notera par $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$) en un point arbitraire $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
3. En déduire l'expression du vecteur gradient de f dans le point $(1,-1)$ (il sera noté $\mathrm{grad} f(1,-1)$).
4. Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à G_f au point $M(1,-1,2)$.
5. Montrer que f admet *seulement* deux points critiques, à savoir $(0,0)$ et $(-1,-1)$.
6. Montrer que f admet un minimum (local) en $(0,0)$.
7. Dans la suite on se propose d'analyser si en $(-1,-1)$, f admet ou non un extremum (minimum ou maximum) local.
   (a) Étudier la variation de l'application g définie par $g(x) = f(x,x)$, notamment autour de $x = -1$.
   (b) En posant $x = \sqrt{2}\cos t$ et $y = \sqrt{2}\sin t$ on définit une fonction h de variable t par $h(t) = f(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t)$. Écrire l'expression de h ainsi obtenue et étudier sa variation autour du point $t = \frac{5\pi}{4}$. [Indication : remarquer que pour $t = \frac{5\pi}{4}$ on obtient $(x,y) = (-1,-1)$]
   (c) En déduire de l'étude de ces variations si $(-1,-1)$ est un point d'extremum pour f. Justifier la réponse.
8. La fonction f admet-t-elle de minimum et/ou de maximum globaux ? Si oui, lesquels ? Justifier la réponse.