L1-MS2 - 2012/2013 - **Examen du 15 mai 2013** - Session 1

Examen de Mathématiques pour les Sciences (MS2)

Durée: **3** heures – Les documents, les calculatrices, les téléphones, smartphones et tablettes ne sont pas autorisés
Le barème est donné à titre indicatif : 7+3+5+5

Exercice 1 :

1. (a) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $\dfrac{X^4-6}{(X+2)(X^2+1)}$.
   (b) En déduire la valeur de l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^4-6}{(x+2)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$.
2. Préciser le domaine de définition, puis calculer les primitives suivantes :
   (a) $\displaystyle\int \ln(x)\,\mathrm{d}x$ puis $\displaystyle\int \ln(x)\ln(x^2)\,\mathrm{d}x$. (Indication : IPP)
   (b) $\displaystyle\int \frac{\sin x\ \mathrm{d}x}{\sin^2 x\ -\ 5}$. (Indication : règles de Bioche)

Exercice 2 : On veut trouver l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \qquad y'' + 2y' - 3y = x\mathrm{e}^{2x}.$$

1. Si (E_0) est l'équation sans second membre attachée à (E), écrire l'équation caractéristique et en déduire l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions y_0 de (E_0).
2. Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E).

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + 2xy^2$. Notons par G_f le graphe de f, défini par $G_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } z = f(x,y)\}$.

1. Tracer dans le plan la courbe de niveau $z = 0$ pour f.
2. Calculer les dérivées partielles de f (notées $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$) en un point arbitraire $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
3. En déduire l'expression du vecteur gradient de f en un tel point (il sera noté $\mathrm{grad}f(x,y)$).
4. Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à G_f au point $M(1;1;3)$.
5. Déterminer le ou les points critiques de la fonction f.
6. En étudiant $f(-y^2,y)$, montrer que f ne possède pas de minimum local en $(0,0)$.
7. Montrer que f ne possède pas de maximum local en $(0,0)$.
8. Étudier les extrema de f.

Exercice 4 : Soient $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, strictement croissante sur $[0,1]$, g la fonction réciproque de f, (en particulier, $\forall x \in [0;1],\ g(f(x)) = x$). On note G une primitive de g, et F une primitive de f.

Soit $\Phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in [0,1], \quad \Phi(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} g(t)\,\mathrm{d}t - xf(x).$$

1. On suppose dans cette question que f est dérivable. Montrer que Φ est dérivable et que $\Phi' = 0$.
2. Dans la suite on suppose que f est continue, strictement croissante, mais pas nécessairement dérivable. Soit $x \in [0,1]$.
   (a) Déterminer $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$.
   (b) Montrer que g est strictement croissante.
   (c) Justifier l'inégalité $(f(x+h)-f(x))x \leq \int_{f(x)}^{f(x+h)} g(t)\,\mathrm{d}t \leq (f(x+h)-f(x))(x+h)$
   (d) En déduire l'inégalité suivante $\displaystyle\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - f(x+h) \leq \frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h} \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - f(x)$.
   (e) En déduire que Φ est dérivable en x et calculer sa dérivée.
3. On suppose de plus que $f(0) = 0$.
   (a) Montrer que $\forall x \in [0,1]$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} g(t)\,\mathrm{d}t = xf(x)$.
   (b) Dans le cas où $f(x) = 2\sqrt{x}$, représenter les trois quantités de l'égalité précédente en termes d'aires de trois surfaces de $\mathbb{R}^2$ et interpréter l'égalité.
