L1 - S2 - MPI 2012 - 2013 - SESSION 2

CORRIGÉ DE L'EXAMEN DE MATHS POUR SCIENCES

EXERCICE 1 : (1) $X^4 - 16 = (X-2)(X+2)(X^2+4)$

(2) $\frac{X^4-1}{X^4-16} = 1 + 15 \cdot \frac{1}{X^4-16}$ et on note $F(x) = \frac{1}{X^4-16}$

$\frac{1}{X^4-16} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2} + \frac{cx+d}{x^2+4}$ où a, b, c, d sont à trouver

$\left[(x-2)F(x)\right]_{x=2} = \begin{cases} a \\ \frac{1}{4 \cdot 8} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{32}$.

$\left[(x+2)F(x)\right]_{x=-2} = \begin{cases} b \\ \frac{1}{(-4)\cdot 8} \end{cases} \Rightarrow b = -\frac{1}{32}$

$x = 0 \Rightarrow F(0) = \begin{cases} -\frac{1}{16} \\ -\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{d}{4} \end{cases} \Rightarrow d = 2a - 2b - \frac{1}{4}$

donc $d = -\frac{1}{8}$

$\lim_{x\to\infty} x F(x) = \begin{cases} 0 \\ a+b+c \end{cases} \Rightarrow c = 0$

Donc $\boxed{\frac{X^4-1}{X^4-16} = 1 + \frac{15}{32} \cdot \frac{1}{X-2} - \frac{15}{32} \cdot \frac{1}{X+2} - \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{X^2+4}}$

(3) $\int_0^1 \frac{x^4-1}{x^4-16} dx = \int_0^1 dx + \frac{15}{32}\int_0^1 \frac{dx}{x-2} - \frac{15}{32}\int_0^1 \frac{dx}{x+2} - \frac{15}{16}\int_0^1 \frac{\frac{1}{2}dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}$

$= \left[x + \frac{15}{32}\left(\ln|x-2| - \ln|x+2| - 2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{2}\right)\right]_0^1$

$= 1 - \frac{15}{32}\ln 3 - \frac{15}{16}\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{2}$

EXERCICE 2 : (1) $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$

(2) De (1) $\Rightarrow \tan^2 x = (\tan x)' - 1$ donc

$I = \int_0^{\pi/4} \sin x \tan^2 x\, dx = -\underbrace{\int_0^{\pi/4} \sin x\, dx}_{\to I_1} + \underbrace{\int_0^{\pi/4} \sin x (\tan x)' dx}_{\to I_2}$

$I_2 \underset{IPP}{=} \left[\sin x \tan x\right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \cos x \tan x\, dx$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} - I_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \int_0^{\pi/4} (\cos x)' dx = \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)$

Donc $I = \frac{1}{\sqrt{2}} - 2I_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) = \frac{3}{\sqrt{2}} - 2$

EXERCICE 3 : (1) $y' + (\sin^2 x) y = 0 \quad (E_0)$

est du type $y' + ay = 0$ avec solutions

$y_0(x) = \lambda e^{-\int a(x)dx}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ où $\int a(x)dx$

est une primitive de $a(x) = \sin^2 x$. Or, la formule $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ donne $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

d'où $\int a(x)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)dx =$

$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\int (\sin(2x))' dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + \underbrace{cte}_{\substack{=0 \\ (\text{prise})}}$

Donc $\boxed{y_0(x) = \lambda e^{-\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}}, \forall \lambda \in \mathbb{R}}$

(2) On propose y_p = sol. particulière de (E) sous la forme $y_p = \lambda y_0$ où λ = fonction inconnue et y_0 = sol. de (E_0).

En remplaçant dans (E) on obtient :

$\lambda' y_0 + \lambda \underbrace{(y_0' + a y_0)}_{=0 \text{ car } y_0 \text{ sol. de } (E_0)} = e^{\frac{1}{4}\sin(2x)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \lambda' y_0 = e^{\frac{1}{4}\sin(2x)} \underset{(1)}{\Leftrightarrow} (\lambda' e^{-\frac{x}{2}} - 1) e^{\frac{1}{4}\sin(2x)} = 0 \quad \forall x$

$\Leftrightarrow \quad \lambda'(x) = e^{\frac{x}{2}} \quad , \forall x \in \mathbb{R}$

d'où $\quad \lambda(x) = \int e^{\frac{x}{2}} dx = 2 \int (e^{\frac{x}{2}})' dx = 2 e^{\frac{x}{2}}$

(on a pris la cte $= 0$ car il fallait trouver <u>une</u> sol. part. y_p, donc une λ (= fonct) au moins)

Donc $\quad y_p(x) = 2 e^{\frac{x}{2}} y_0(x) = 2 e^{\frac{\sin(2x)}{4}}$

③ L'ensemble des solutions de (E) est donné par des fonctions $y = y_0 + y_p$ où y_0 est sol. arbitraire de (E_0), donc :

$$y(x) = \left(\lambda e^{-\frac{x}{2}} + 2\right) e^{\frac{\sin(2x)}{4}} \quad , \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

<u>EXERCICE 4</u> : ① $z = 0 \Leftrightarrow (x^2+y^2) e^{x+y} = 0$

or l'exponentielle étant > 0, ceci équivaut à $x^2+y^2 = 0$ i.e. à $(x,y) = (0,0)$. La courbe de niveau $z = 0$ se réduit donc à un point du plan $\mathbb{R}^2$, à savoir l'origine.

② $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (x^2+y^2+2x) e^{x+y}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x^2+y^2+2y) e^{x+y}$

③ $\overrightarrow{\text{grad}} f(1,-1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(1,-1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

④ L'éq. du plan tangent est (en $M(1,-1,2)$)

$z = 2 + 4(x-1) + 0 \cdot (y-(-1))$, donc $4x - z = 2$

⑤ (x,y) est pt. critique de f ssi $\text{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ i.e. ssi $(*)$ $x^2+y^2+2x = 0 = x^2+y^2+2y$, en particulier si $x = y$ cas où on doit avoir $2x(x+1) = 0$ i.e. $x = 0$ ou $x = -1$, d'où (x,y) pt. crit. de f <u>ssi</u> $(x,y) = (0,0)$ ou $(x,y) = (-1,-1)$.

<u>Obs</u> : $(*) \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 1 = x^2 + (y+1)^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x,y)$ est pt d'intersect. de ces 2 cercles de centre $(-1,0)$ resp $(0,-1)$ et de rayons $= 1$.

⑥ $f(0,0) = 0 < (x^2+y^2) e^{x+y} = f(x,y)$ donc $(0,0)$ est un pt de ~~minimum~~ minimum local strict pour f.

⑦ a) $f(x,x) = 2x^2 e^{2x} \equiv g(x)$

$g'(x) = 4x(x+1) e^{2x}$ et on a

x		-1		0	
$g(x)$	$\nearrow$	$g(-1)$	$\searrow$	0	$\nearrow$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc g admet un max en -1

b) $h(t) = f(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t) = 2 e^{\sqrt{2}(\cos t + \sin t)}$

$h'(t) = 2\sqrt{2}(\cos t - \sin t) e^{\sqrt{2}(\cos t + \sin t)}$

Comme $(-1,-1)$ correspond en coord. polaires à $(r,t) = (\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4})$ on étudie la variation de h autour de $5\pi/4$:

t		$5\pi/4$	
$h(t)$	$\searrow$	$h(5\pi/4)$	$\nearrow$
$h'(t)$	$-$	0	$+$

Donc h, qui est la restriction de f au cercle de rayon $\sqrt{2}$, admet un <u>min local</u> en $5\pi/4$

c) De (a) et (b) $\Rightarrow (-1,1)$ est pt. de selle

⑧ $(0,0)$: min global ; $\lim_{x \to \infty} f(x,x) = +\infty$ donc pas de max global.