L1 - MS2 - 2012 - 2013 - EXAMEN du 15 mai 2013

CORRIGÉ de L'EXAMEN de MS2 - SESSION 1

EXERCICE 1 : 1.a

$$\begin{array}{r|l} X^4 \qquad\qquad -6 & X^3+2X^2+X+2 \\ -X^4-2X^3-X^2-2X & X-2 \\ \hline -2X^3-X^2-2X-6 & \\ +2X^3+4X^2+2X+4 & \\ \hline 3X^2 \qquad -2 & \end{array}$$

d'où :

$$\frac{X^4-6}{(X+2)(X^2+1)} = X-2+\frac{3X^2-2}{(X+2)(X^2+1)} = $$

$$= X-2+\underbrace{\frac{a}{X+2}+\frac{bX+c}{X^2+1}}_{F(X)}$$

$$\left[(x+2)F(x)\right]_{x=-2} = \frac{10}{5}=2 = a \Rightarrow \underline{a=2}$$

$F(0)=\frac{a}{2}+c$ et $F(0) = -\frac{2}{2} = -1 \Rightarrow \underline{c=-2}$

$F(-1) = a-\frac{b}{2}+\frac{c}{2} = 1-\frac{b}{2}$ et $F(-1)=\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{b=1}$

Donc :

$$\boxed{\frac{X^4-6}{(X+2)(X^2+1)} = X-2+\frac{2}{X+2}+\frac{X-2}{X^2+1}}$$

1.b

$$I \equiv \int_0^1 \frac{x^4-6}{(x+2)(x^2+1)}dx = \int_0^1 (x-2)dx + 2\int_0^1\frac{dx}{x+2} + \frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}dx - 2\int_0^1\frac{dx}{x^2+1} =$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_0^1 + 2\left[\ln|x+2|\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1 - 2\left[\operatorname{Arctan} x\right]_0^1$$

donc $\boxed{I = -\frac{3}{2} + \ln\frac{9}{2\sqrt2} - 2\operatorname{Arctan} 1 = -\frac{\pi+3}{2} + \ln\frac{9}{2\sqrt2}}$

2.a $\int \ln x\, dx$ est définie sur $]0,\infty[$, i.e. là où $x \mapsto \ln x$ est définie et continue. De m̂ pour l'autre.

$$\int \ln x\,dx = \int (x)'\ln x\,dx \overset{IPP}{=} x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x(\ln x-1)+C,\ \forall C\in\mathbb{R}$$

$$\int \ln(x)\ln(x^2)dx = 2\int \ln^2(x)dx \overset{IPP}{=} 2\left(x\ln^2(x) - 2\int x\frac{1}{x}\ln x\right)$$

$$= 2x\ln^2(x) - 4\int\ln x = 2x(\ln^2(x)-2\ln(x)+2)+C$$

$$= 2x\left((\ln x-1)^2+1\right)+C,\ \forall C\in\mathbb{R}$$

2.b $\int \frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x-5}$ est définie partout sur $\mathbb{R}$ car $\forall x\in\mathbb{R}$, $\sin^2 x - 5 \le -4 < 0$ et la fonction à primitiviser est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\int\frac{\sin x\,dx}{\sin^2x-5} = \int\frac{(\cos x)'}{4+\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}\int\frac{\left(\frac{\cos x}{2}\right)'}{1+\left(\frac{\cos}{2}\right)^2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{\cos}{2}\right) + C,\ \forall C\in\mathbb{R}.$$

EXERCICE 2 : 1 (E_0) : $y''+2y'-3y=0$

donc son eq. caracteristique est $r^2+2r-3=0$ $\Leftrightarrow (r-1)(r+3) \Leftrightarrow r=1$ ou $r=-3$. D'où

$$\mathcal{S}_0 = \{y_0 : \mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid y_0(x) = \lambda e^x + \mu e^{-3x}, \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$$
$$= \operatorname{Vect}\{x\mapsto e^x;\ x\mapsto e^{-3x}\}.$$

(2) Le membre de droite de (E) est du type polynôme×exponentielle : $P(x)e^{mx}$ où $P(x) = x$ ($d^\circ P = 1$) et $m = 2$. Alors, cf. Thm. du CM, en comparant $m = 2$ avec les racines 1 et -3 de l'éq. caract., on constate qu'on peut trouver une solution particulière y_p de (E) sous la forme $y_p(x) = Q(x)e^{2x}$ où $d^\circ Q = d^\circ P = 1$ donc on propose $y_p(x) = (ax+b)e^{2x}$.
En calculant $y_p'(x) = (2ax + 2b + a)e^{2x}$, $y_p''(x) = (4ax + 4b + 4a)e^{2x}$ on obtient en remplaçant dans (E) :

$$e^{2x}(4ax + 4b + 4a + 4ax + 4b + 2a - 3ax - 3b) = xe^{2x}$$

$$\underset{e^{2x} > 0 \forall x}{\Longleftrightarrow} (5a-1)x + (5b + 6a) = 0 \underset{\{1, x\} \text{ syst. libre}}{\Longleftrightarrow}$$

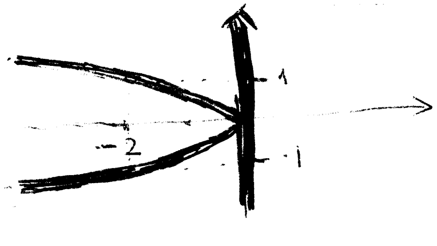
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 5a - 1 = 0 \\ 5b = -6a \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ b = -\frac{6}{25} \end{cases}.$$

Donc l'ensemble $\mathcal{S}$ des sol. de (E) est :

$$\mathcal{S} = \left\{ y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid y(x) = \lambda e^x + \mu e^{-3x} + \frac{1}{5}\left(x - \frac{6}{5}\right)e^{2x}, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\{x \mapsto e^x ; x \mapsto e^{-3x}\} + \left\{x \mapsto \frac{1}{5}\left(x - \frac{6}{5}\right)e^{2x}\right\}$$

EXERCICE 3 : (1) $f(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x(x + 2y^2) = 0$
$\Longleftrightarrow x = 0$ ou $x = -2y^2$. La courbe de niveau recherchée est donc le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ formé par l'union de l'ordonnée $\{0\} \times \mathbb{R}$ et de la parabole $\{(-2\lambda^2, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ donc



(2) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(x + y^2)$
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4xy$

(3) $(\overrightarrow{\mathrm{grad}} f)(x,y) = 2\begin{pmatrix} x + y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ pour chaque couple (x,y) fixé.

(4) $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 4$; $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 4$, d'où

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 3 + 4(x-1) + 4(y-1)\}$$
$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x + 4y - z = 5\}$$

(5) (x,y) est pt. critique pour f ssi $(\overrightarrow{\mathrm{grad}} f)(x,y) = \binom{0}{0}$
i.e. $x + y^2 = 0$ $\underline{\underline{\text{et}}}$ $xy = 0 \Longleftrightarrow (x = 0 \vee y = 0) \wedge (x = -y^2)$
$\Longleftrightarrow (x,y) = (0,0)$. Il n'y a donc qu'un point critique à savoir à $(0,0)$.

(6) $f(-y^2, y) = -y^4 < 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^*$ alors que $f(0,0) = 0$, donc $f(-y^2, y) \leq f(0,0)$ donc f ne possède pas un minimum en $(0,0)$

(7) $f(x,0) = x^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$, donc $f(x,0) \geq f(0,0)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ donc f ne possède pas de maximum en $(0,0)$

(8) $(0,0)$ étant le seul point critique de f sur $\mathbb{R}^2$ (ouvert, non-borné) mais n'étant ni un min ni un max, on déduit que f ne possède pas d'extrema sur $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE 4 : (1) On choisit $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ et $G(y) = \int_0^y g(t)\,dt$. Alors on a :

$\Phi(x) = F(x) + G(f(x)) - x F'(x)$, d'où

$\Phi'(x) = F'(x) + G'(f(x)) \cdot f'(x) - F'(x) - x F''(x)$

(Obs pour le 2ème et 4ième terme on a utilisé f dérivable !)

$= g(f(x)) \cdot f'(x) - x f'(x) = 0.$

(2) (a) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt = \lim\limits_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x) = f(x)$

(il suffit que f soit continue pour assurer $\exists F$ et $F' = f$)

(b) C'est une question de cours rencontrée ds. le poly de CM de Maths du semestre 1 : le Lemme 6.32 (pag 77).
Soient $y_1, y_2 \in [f(0), f(1)]$, $y_1 < y_2$ et soient x_1, resp. x_2 les uniques antécédents de y_1 resp y_2 par f (i.e. $x_1 = g(y_1)$, $x_2 = g(y_2)$). Si, par absurde, on avait $g(y_1) \geq g(y_2)$ (i.e. $x_1 \geq x_2$) alors comme f est (strictement) croissante : $f(x_1) \geq f(x_2)$ i.e. $f(g(y_1)) \geq f(g(y_2))$ i.e. $y_1 \geq y_2$, ce qui contredit $y_1 < y_2$. Donc $y_1 < y_2 \Rightarrow g(y_1) < g(y_2)$ i.e. g strict. croiss.

(c) $h > 0 \Rightarrow f(x) < f(x+h)$ donc, par (b) :

$\forall t \in [f(x), f(x+h)] : g(f(x)) \leq g(t) \leq g(f(x+h))$

i.e. $x \leq g(t) \leq x+h$. D'où :

$$x \int_{f(x)}^{f(x+h)} dt \leq \int_{f(x)}^{f(x+h)} g(t)\,dt \leq (x+h) \int_{f(x)}^{f(x+h)} dt$$

i.e. $x\,(f(x+h) - f(x)) \leq \int_{f(x)}^{f(x+h)} g(t)\,dt \leq (x+h)(f(x+h) - f(x))$

(d) $\Phi(x+h) - \Phi(x) \overset{\text{(Charles)}}{=}$

$= \int_x^{x+h} f(t)\,dt + \int_{f(x)}^{f(x+h)} g(t)\,dt - (x+h) f(x+h) + x f(x)$

Avec (c) on a alors

$\int_x^{x+h} f(t)\,dt + x\,(f(x+h) - f(x)) - (x+h) f(x+h) + x f(x) \leq$

$\leq \phi(x+h) - \phi(x) \leq$

$\leq \int_x^{x+h} f(t)\,dt + (x+h)(f(x+h) - f(x)) - (x+h) f(x+h) + x f(x)$

i.e. $\int_x^{x+h} f(t)\,dt - h f(x+h) \leq \phi(x+h) - \phi(x) \leq \int_x^{x+h} f(t)\,dt - h f(x)$

et, en divisant par $h > 0$ on obtient l'inégalité désirée.

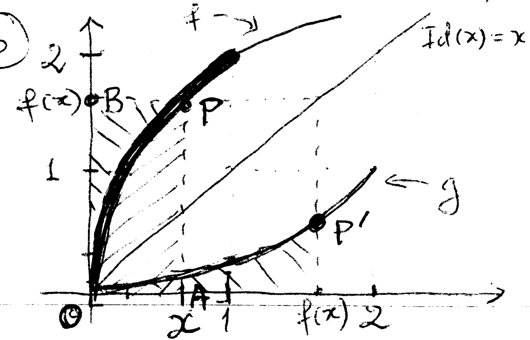
(e) Par passage à la $\lim\limits_{h \to 0}$ dans l'inégalité de (d), et tenant compte de (a) et du fait que f continue :

$$f(x) - f(x) \leq \lim_{h \to 0} \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} \leq f(x) - f(x)$$

i.e. ϕ est dérivable en chaque $x \in [0,1]$ et $\phi'(x) = 0$.

(3) (a) cf. (2.e), ϕ est constante sur $[0,1]$ et comme $\phi(0) = 0$ (voir déf. de ϕ, où $\left[\int_0^{f(x)} g(t)\,dt\right]_{x=0} = \int_0^0 g(t)\,dt = 0$) on déduit $\phi = 0$ sur $[0,1]$, i.e. l'identité demandée.

(b)



$x f(x)$ = Aire rectangle OAPB

$\int_0^x f(t)\,dt$ = Aire du sous-graphe de la courbe OP

$\int_0^{f(x)} g(t)\,dt$ = Aire du sous graphe de la courbe OP' = aire du sur-graphe de OP bornée en haut par BP.