

Examen de Mathématiques pour les Sciences (MS2)

Durée: 2 heures – Les documents, les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés

Exercice 1 :

1. (a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $F(X) = \frac{1}{(X-1)^2(X+1)}$.
- (b) En déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}$.
2. Calculer l'intégrale : $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2x)}{\cos^2 x + 2} dx$. [Indication : $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$]
3. (a) Calculer les primitives $\int \sin(3x) \cos x dx$ et en déduire la valeur de $K = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(3x) \cos x dx$.
[Indication : IPP]
- (b) Aurait-on pu obtenir la valeur de K sans calculer les primitives ? Justifier.

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie en chaque $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 + 4y + 8$.

1. Calculer les dérivées partielles premières $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ de f en chaque point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Vérifier que le point $M(1, -1, 5) \in \mathbb{R}^3$ appartient au graphe de f et donner l'équation du plan tangent au graphe en ce point.
3. Trouver les points critiques de f et calculer la valeur de f en ces points.
4. Mettre $f(x, y)$ sous la forme d'une somme de trois carrés et utiliser cette forme pour étudier f autour de ses points critiques afin de décider si elle admet des extremas en ces points.
5. Préciser la nature de ces extremas (s'il s'agit de min ou de max) et dire s'ils sont globaux ou non.

Exercice 3 : On veut trouver l'ensemble de fonctions $y :]1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifient l'équation différentielle d'ordre 1 :

$$(E) \quad y' - \ln(x-1)y = e^{x \ln(x-1)}$$

1. Si (E_0) est l'équation sans second membre attachée : $y' - \ln(x-1)y = 0$, trouver l'ensemble des solutions y_0 de (E_0) .
 2. Trouver une solution particulière de (E) par la méthode de la variation de la constante.
 3. En déduire la solution générale de (E) .
-