L1-MS2 - 2011/2012 - **Examen du 23 mai 2012** - Session 1

Examen de Mathématiques pour les Sciences (MS2)

Dure: **3** heures – Les documents, les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés

---

Exercice 1 :

1. (a) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $\dfrac{X}{(X^2+1)(X+2)}$.

   (b) En déduire la valeur de l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x$.

2. Calculer les primitives $\displaystyle\int x\ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x$. (Indication : on pourrait procéder soit par IPP soit en faisant un changement de variables convenable soit en combinant ces deux techniques).

Exercice 2 : On veut trouver l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \qquad y'' + y' - 2y = 10x\mathrm{e}^{3x}$$

1. Si (E_0) est l'équation sans second membre attachée à (E), écrire l'équation caractéristique et en déduire l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions y_0 de (E_0).
2. Trouver une solution particulière de (E).
3. En déduire l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E).

Exercice 3 : Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = x^2 + y$.

1. Trouver la courbe de niveau $z = 0$ pour g. On la notera $\mathcal{C}$.
2. Soit D l'ensemble des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels la quantité $\sqrt{g(x,y)}$ est bien définie. Déduire de la question précédente l'ensemble D et le representer graphiquement en le hachurant dans le plan $\mathbb{R}^2$ (répéré par un système de coordonnées cartesiennes xOy).
3. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \sqrt{x^2+y}$. Soit $D_0 = \{(x,y) \in D \mid g(x,y) > 0\}$.
   (a) Calculer les dérivées partielles de f (notées $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$) dans un point arbitraire $(x,y) \in D_0$.
   (b) En déduire l'expression du vecteur gradient de f en un tel point (il sera noté $\mathrm{grad} f(x,y)$).
   (c) La fonction f a-t-elle des points critiques sur D_0 ?
4. Montrer que f possède un minimum en chaque point de la courbe $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x^2\}$.
5. Déduire des deux dernières questions que f ne possède pas d'autre extremum.
6. Notons par $G_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D \text{ et } z = f(x,y)\}$ le graphe de f.
   (a) Donner l'expression d'un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ de $\mathbb{R}^3$ à la surface G_f dans le point $M(1;1;\sqrt{2})$ de cette surface.
   (b) Trouver une équation cartésienne du plan tangent à G_f dans le point $M(1;1;\sqrt{2})$.

Exercice 4 : On rappelle qu'une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est dite positive sur $[0,1]$ si et seulement si $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \geq 0$. De même, elle est dite négative sur $[0,1]$ si et seulement si $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \leq 0$.

1. Soit, $\forall x \in [0,1]$, $g(x) = 2x - 1$.
   (a) Représenter graphiquement la fonction g et la fonction $|g|$ qui associe à tout $x \in [0,1]$ la quantité $|g(x)|$.
   (b) Montrer en utilisant la définition ci-dessus que g n'est ni positive ni négative sur $[0,1]$.
   (c) Calculer les deux nombres $\left|\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x\right|$ et $\displaystyle\int_0^1 |g(x)|\,\mathrm{d}x$ et dire lequel est le plus grand.
   (d) Aurait-on pu trouver le résultat de la question (c) graphiquement ? Comment ?
2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue sur $[0,1]$.
   (a) Montrer que si f est positive sur $[0,1]$ alors $\left|\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x$.
   (b) Réciproquement, montrer que si $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x$ alors f est positive sur $[0,1]$.
   (Indication : on pourra se ramener à l'étude du signe de la fonction $|f| - f$)
   (c) Montrer que $\left|\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x$ si et seulement si f est soit positive soit négative sur $[0,1]$.