CORRIGÉ de L'EXAMEN de MATHS pour SCIENCES

L1 - S2 (MS2) 2011-2012 - SESSION 2 (19 juin 2012)

EXERCICE 1 :

(1a) $\dfrac{1}{(X-1)^2(X+1)} = \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{(X-1)^2} + \dfrac{c}{X+1}$

Notons F(X) la fraction. On doit trouver a, b, c. On a :

$[(x-1)^2F(x)]_{x=1} = \left\{\begin{array}{l} b \\ \frac{1}{2}\end{array}\right. \Rightarrow \boxed{b=\frac{1}{2}}$

$[(x+1)F(x)]_{x=-1} = \left\{\begin{array}{l} c \\ 1/4\end{array}\right. \Rightarrow \boxed{c=\frac{1}{4}}$

$F(0) = \left\{\begin{array}{l} 1 \\ -a+b+c\end{array}\right. \Rightarrow a = b+c-1 \Rightarrow \boxed{a=-\frac{1}{4}}$

Donc $\boxed{F(X) \equiv \dfrac{1}{(X-1)^2(X+1)} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{-1}{X-1} + \dfrac{2}{(X-1)^2} + \dfrac{1}{X+1}\right)}$

(1.b) $I = \displaystyle\int_{-1/2}^{+1/2} F(x)\,dx = \frac{1}{4}\left(-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x-1} + 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(x-1)^2} + \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{x+1}\right)$

$= \dfrac{1}{4}\left[-\ln|x-1| - \dfrac{2}{x-1} + \ln|x+1|\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \underbrace{\ln\sqrt{3} + \dfrac{2}{3}}$

(2) $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{2\sin(2x)}{(2\cos^2 x - 1) + 5}\,dx = -\int_0^{\pi/2} \frac{(\cos(2x))'\,dx}{\cos(2x)+5}$

$= -\left[\ln(\cos(2x)+5)\right]_0^{\pi/2} = \ln 6 - \ln 4 = \ln\dfrac{3}{2}$

(3) $K(x) = \displaystyle\int \sin(3x)\underbrace{\cos x}_{(\sin x)'}\,dx \underset{\text{IPP}}{=} \sin(3x)\sin x - 3\int \cos(3x)\underbrace{\sin x}_{-(\cos x)'}\,dx$

$\underset{\text{IPP}}{=} \sin(3x)\sin x + 3\cos(3x)\cos x + 9\underbrace{\int \sin(3x)\cos x\,dx}_{K(x)}$

$\Rightarrow \boxed{K(x) = -\dfrac{1}{8}(\sin(3x)\sin x + 3\cos(3x)\cos x) + C} \quad \forall C \in \mathbb{R}$

d'où $K = [K(x)]_{-\pi}^{\pi} = -\dfrac{1}{8}(0 + 3(-1)(-1) - 0(-1)(-1)) = 0$

Obs : On aurait pu dire directement que $K = 0$ car $x \mapsto \sin(3x)\cos x$ est une fonction impaire à intégrer sur un intervalle symétrique par rapport à 0.

EXERCICE 2 :

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(x+y)$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(x+2y+2)$

(2) $f(1,-1) = 5 \Rightarrow M(1,-1,5) \in G_f$. Le plan tangent à la surface G_f en $x_0 = 1$, $y_0 = -1$ a l'éq.

$z = f(1,-1) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-1)\cdot(x-1) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,-1)\cdot(y-(-1))$

i.e. $\boxed{2y - z + 7 = 0}$

(3) (x,y) est pt. critique ssi $\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ i.e.

ssi $\begin{cases} x+y=0 \\ x+2y=+2 \end{cases} \underset{\text{syst. de Cramer}}{\iff} \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$ sol. unique.

$f(2,-2) = 4$

(4) $f(x,y) = (x+y)^2 + (y+2)^2 + 4$

(5) Par (3) : $f(x,y) = (x+y)^2 + (y+2)^2 + f(2,-2)$

$\geq f(2,-2) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Or $(2,-2)$ est un unique pt. critique pour f donc c'est un minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE 3 :

① $y_0(x) = \lambda e^{-\int(-\ln(x-1))}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Or $\int \ln(x-1)\,dx = \int (x-1)' \ln(x-1)\,dx \overset{\text{IPP}}{=}$

$= (x-1)\ln(x-1) - \int \cancel{(x-1)} \cdot \frac{1}{\cancel{x-1}}\,dx =$

$= (x-1)\ln(x-1) - x$

Donc $\boxed{y_0(x) = \lambda \exp\big((x-1)\ln(x-1) - x\big) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}}$

② Si y_0 = sol. de l'éq. (E_0) on propose comme sol. de (E) : $y = \lambda y_0$ où λ est cette fois-ci une fonction dérivable sur I.
En remplaçant dans (E) on a :

$\lambda' y_0 + \lambda \underbrace{(y_0' - \ln(x-1)y_0)}_{=0 \text{ car } y_0 = \text{sol. de } (E_0)} = e^{x\ln(x-1)}$

$\Leftrightarrow$ (1) avec $\lambda = 1$ là-bas $\quad \lambda'(x) = e^{x\ln(x-1)} \cdot e^{-(x-1)\ln(x-1)+x}$

$= e^{\ln(x-1)} \cdot e^{x} = (x-1)e^{x}$

D'où $\lambda(x) = \int (x-1)e^{x}\,dx = \int x e^{x} dx - \int e^{x} dx$

$\overset{\text{IPP car } (e^x)' = e^x}{=} x e^{x} - \int e^{x} - e^{x} = e^{x}(x-2) + C$

Or, ce dont on a besoin est une sol. particulière de (E) donc on prendra $C = 0$ et on a la sol. part. recherchée :

$y_p(x) = \lambda(x) y_0(x) = e^{x}(x-2)e^{(x-1)\ln(x-1)} \cdot e^{-x}$

$\Rightarrow \boxed{y_p(x) = (x-2)\,e^{(x-1)\ln(x-1)}}$

③ Toute sol. de (E) s'écrit comme somme entre une sol. de (E_0) et une sol. part. de (E) : $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$!

Si $\mathcal{S}_0$ = ens. des sol. de (E_0) et $\mathcal{S}$ = ens. des sol. de (E), alors $\mathcal{S}_0$ est l'e.v. de dimension 1 :

$\mathcal{S}_0 = \text{Vect}\left\{]1,\infty[\ni x \overset{y_0}{\longmapsto} e^{(x-1)\ln(x-1)-x} \right\}$

et $\mathcal{S}$ est l'espace affine de dim 1

$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \{y_p\}$

donc $\forall y \in \mathcal{S}$:

$\boxed{y(x) = e^{(x-1)\ln(x-1)}\left(\lambda e^{-x} + (x-2)\right) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}}$