L1 - S2 - SESSION 1 - 2011-2012 (23.05.2012)

CORRIGÉ de l'EXAMEN de MATHS pour SCIENCES

EXERCICE 1 : (1.a) x^2+1 et $x+2$ sont polynômes irreductibles sur $\mathbb{R}$ donc la décomp. "a priori" est :

$$F(x) = \frac{x}{(x^2+1)(x+2)} = \frac{a}{x+2} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

$$[(x+2)F(x)]_{x=a} = a = (-2)/((-2)^2+1) \Rightarrow \boxed{a = -\frac{2}{5}}$$

$$x = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{5} + c \Rightarrow \boxed{c = 1/5}$$

$$x = -1 \Rightarrow -\frac{1}{2} = -\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - b\right) \Rightarrow \boxed{b = \frac{2}{5}}$$

Donc

$$\frac{x}{(x^2+1)(x+2)} = \frac{1}{5}\left(\frac{-2}{x+2} + \frac{2x+1}{x^2+1}\right)$$

(1.b)

$$I \underset{(1.a)}{=} -\frac{2}{5}\int_0^1 \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= -\frac{2}{5}\left[\ln|x+2|\right]_0^1 + \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= -\frac{2}{5}\ln\frac{3}{2} + \frac{1}{5}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1 + \frac{1}{5}\left[\operatorname{Arctan} x\right]_0^1 =$$

$$= -\frac{2}{5}\ln 3 + \frac{3}{5}\ln 2 + \frac{1}{5}\cdot\frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{5}\left(\ln\frac{8}{9} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

(2) $\int x\ln(x^2+1)\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2+1)'\ln(x^2+1)\,dx = \frac{1}{2}\int u'\ln u$

(où $u(x) = x^2+1$) $\overset{IPP}{=} \frac{1}{2}u(x)\ln u(x) - \frac{1}{2}\int \frac{\cancel{u}u'(x)}{\cancel{u(x)}}\,dx$

$$= \frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}x^2 + C$$

$\forall C \in \mathbb{R}$.

Obs : $\int u'(x)\,dx = u(x) + c = (x^2+1) + c = x^2 + c$ car les ctes "rentrent" ds. la cte arbitraire $c \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 2 : (1) (E_0) : $y'' + y' - 2y = 0$.

Eq. caract: $r^2 + r - 2 = 0 \Leftrightarrow (r-1)(r+2) = 0$
$\Rightarrow$ racines $r_1 = 1$, $r_2 = -2$. Elles sont réelles et distinctes, donc $y_0(x) = \lambda e^{x} + \mu e^{-2x}$ est une solution quelconque, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Donc

$$\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\{x \mapsto e^{-x} ; x \mapsto e^{-2x}\}$$

(2) Remarquons que le membre de droite de (E) est du type exp. x polynôme : $x \mapsto xe^{3x}$

Posons $P(x) = x$, $m = 3$, donc $xe^{3x} = P(x)e^{mx}$ et cf. Thm. du CM on compare m à r_1, r_2 pour déterminer le degré d'un polynôme Q qui entre dans l'expression de la sol. part. recherchée comme : $y_p(x) = Q(x)e^{mx}$. Ici $m = 3 \neq r_1 = 1, r_2 = -2$ donc on propose Q t.q. $d^\circ Q = d^\circ P = 1$, donc on propose $y_p(x) = (ax+b)e^{3x}$, qu'on remplace ds (E) en tenant compte que

$y_p'(x) = (3ax + 3b + a)e^{3x}$ et $y_p''(x) = (9ax + 9b + 6a)e^{3x}$.

Alors (E) $\Rightarrow (10ax + 10b + 7a)e^{3x} = 10xe^{3x}\ \forall x$

$\Leftrightarrow 10a = 1$ et $10b + 7a = 0 \Leftrightarrow a = 1$ et $b = -\frac{7}{10}$

Donc $y_p(x) = \left(x - \frac{7}{10}\right)e^{3x}$

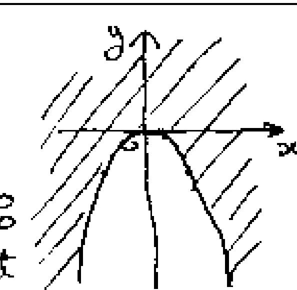
(3) $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \{y_p\} = \mathrm{Vect}\{x \mapsto e^{-x} ; x \mapsto x^{-2x}\} + \{x \mapsto (x - \frac{7}{10})e^{3x}\}$

EXERCICE 3 :

(1) $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid z = g(x,y) = 0\} =$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y = 0\}$

c'est la parabole $y = -x^2$ dans le plan xOy.

② $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) \geq 0\} =$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq -x^2\}$



(3.a) Remarquer que pour $(x,y) \in \mathcal{C}$ les dérivées partielles de f ne sont pas définies. Par contre, $\forall (x,y) \in D_0$ oui, et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g(x,y)}} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{g(x,y)}} \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y}}$$

(3.b) $(\operatorname{grad} f)(x,y) = {}^t\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$
(écriture en tant que vecteur-ligne transposé)

$$= {}^t\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y}}, \frac{1}{2\sqrt{x^2+y}}\right).$$

(3.c) $(x,y) \in D_0$ est point critique de f ssi $(\operatorname{grad} f)(x,y) = {}^t(0,0)$. Or, cf (3.b)

$\frac{1}{2\sqrt{x^2+y}} \underset{\neq}{>} 0 \quad \forall (x,y) \in D_0$ ce qui suffit pour conclure que sur D_0 il n'y a pas de points critiques.

④ $\forall (x_0,y_0) \in \mathcal{C}$ on a $f(x_0,y_0) = 0$ et
$\forall (x,y) \in D \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |(x,y) - (x_0,y_0)| \leq 1\}$
on a $f(x,y) = \sqrt{x^2+y} \geq 0 = f(x_0,y_0)$
(l'égalité étant satisfaite seulement pour d'autres $(x,y) \in \mathcal{C} \cap \{(x,y) \mid |(x,y)-(x_0,y_0)| \leq 1\}$)

Donc, par la définition d'un extremum (ici : minimum) on déduit que $\forall (x_0,y_0) \in \mathcal{C}$ f admet un minimum (non-strict) en (x_0,y_0).

⑤ les extremas d'une fonction peuvent être atteints soit sur le bord du domaine de déf. de celle-ci (ici $\operatorname{dom} f = D$) soit à l'intérieur de ce domaine (ici l'intérieur de D est D_0) mais alors ça doit arriver dans des pts. critiques de D_0. Or, par (3.c) on sait que f n'admet pas de pts. critiques sur D_0 (donc pas d'extremas sur D_0) et par (4, on a vu que f admet des minimas en chaque point du bord de D (noté $\mathcal{C}$).
Donc les seuls extremas de f sur $D = D_0 \cup \mathcal{C}$ sont atteints en $\forall (x_0,y_0) \in \mathcal{C}$ (des minimas).

(6a) Un vecteur normal $\vec{n}$ à la surface G_f en un point $(x_0, y_0, f(x_0,y_0)) \equiv (x_0,y_0,z_0)$ est (cf. CM) :

$$\vec{n} = {}^t\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), 1\right)$$

Ds. le cas $(x_0,y_0) = (1,1)$ (i.e. pour $M(1,1,\sqrt{2})$) les formules de (3.a) fournissent

$$\vec{n} = {}^t\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, 1\right) = \frac{-1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(6.b) L'équation du plan tangent à la surface G_f (de $\mathbb{R}^3$) en (x_0,y_0,z_0) peut être obtenue soit en demandant au vecteur ${}^t(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ d'être orthogonal à $\vec{n}$, soit en retenant l'approximation affine ds. le développement de Taylor de f en (x_0,y_0).
Cette équation est :

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

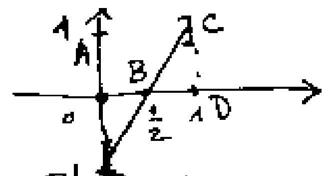
Pour $(x_0,y_0) = (1,1)$ on a donc

$$z = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x-1) + \frac{1}{2\sqrt{2}}(y-1)$$

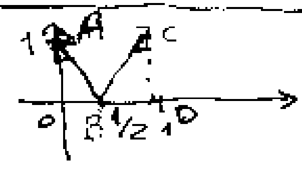
$\Leftrightarrow 2x + y - 2\sqrt{2}\,z = -1.$

EXERCICE 4 :

(1.a.)



g



|g|

(1.b) $x = \frac{1}{4} \Rightarrow g(\frac{1}{4}) = -\frac{1}{2} \not\geq 0 \Rightarrow g$ non-positive

$x = \frac{3}{4} \Rightarrow g(\frac{3}{4}) = \frac{1}{2} \not\leq 0 \Rightarrow g$ non-négative

(1.c) $\int_0^1 g(x)dx = 2\int_0^1 x\,dx - \int_0^1 dx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - [x]_0^1 = 0$

$\Rightarrow \left|\int_0^1 g(x)dx\right| = 0$ aussi. Mais

$\int_0^1 |g(x)|dx = \int_0^{1/2}(1-2x)dx + \int_{1/2}^1 (2x-1)dx =$

$= [x]_0^{1/2} - 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1/2} + 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_{1/2}^1 - [x]_{1/2}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + (1-\frac{1}{4}) - (1-\frac{1}{2})$

$\Rightarrow \int_0^1 |g(x)|dx = \frac{1}{2} > 0 = \left|\int_0^1 g(x)dx\right|$

(1.d) les intégrales sont par déf. des aires de sous-graphes, donc avec les graphes de g et $|g|$ de la question (1.a) on voit que

$$\int_0^1 g(x)dx = \underbrace{(\text{aire } \Delta AA'B)}_{<0} + \underbrace{(\text{aire } \Delta BCD)}_{>0} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$$

$$\int_0^1 |g(x)|dx = \underbrace{(\text{aire } \Delta AOB)}_{>0} + \underbrace{(\text{aire } \Delta BCD)}_{>0} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

(2a) $f \geq 0$ sur $[0,1] \underset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} f(x) \geq 0 \ \forall x \in [0,1]$
donc $|f(x)| = f(x) \ \forall x \in [0,1]$. Alors

$0 \leq \int_0^1 |f(x)|dx = \left|\int_0^1 |f(x)|dx\right| = \left|\int_0^1 f(x)dx\right|.$

(2b) L'hypothèse est équivalente, par linéarité de l'$\int_a^b$: $\int_0^1 (|f(x)| - f(x))dx = 0$. Or, la fonction $h = |f| - f$ est positive et continue (car f et $|f|$ le sont) et un résultat du cours dit que pour une telle fonction, on a :

$\int_0^1 h(x)dx = 0 \Rightarrow h = 0$ sur $[0,1]$.

Or ceci équivaut à $|f| = f$ sur $[0,1]$ et comme $|f| \geq 0$ sur $[0,1]$ il en va de même pour f.

(2c) Soit $\int_0^1 f(x)dx \geq 0$ (et alors on est ds. le cas (2b)) soit $\int_0^1 f(x)dx \leq 0$ et alors $\int_0^1 f(x)dx = -\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \underset{\text{Hyp.}}{=} -\int_0^1 |f(x)|dx \Leftrightarrow \int_0^1 (f+|f|)(x)dx = 0$. On pose $\varphi = f + |f|$ positive continue et on procède comme pour h à (2b).