Examen de Mathématiques pour les Sciences (MS2)

Durée: **2** heures – Les documents, les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés

---

Exercice 1 :

1. Factoriser sur $\mathbb{R}$ le polynôme $X^3 - 8$ (vérifier que 2 est une de ses racines).
2. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $\dfrac{X^4+1}{X^3-8}$ (commencer par mettre en évidence sa partie entière).
3. Mettre $x^2 + 2x + 4$ sous la forme $(x+b)^2 + a^2$ avec a, b que l'on précisera.
4. En déduire la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+4}$.
5. Utiliser les questions précédentes pour trouver la valeur de l'intégrale : $J = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x^4+1}{x^3-8}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 :

1. Exprimer la dérivée $\tan'$ de la fonction tangente (notée tan) en termes de tan (seulement).
2. Utiliser cette formule pour déduire, suite à une intégration par parties, la valeur de $I = \displaystyle\int_{0}^{\pi/4} x \tan^2 x\,\mathrm{d}x$.

Exercice 3 : On veut trouver l'ensemble de fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifient l'équation différentielle d'ordre 1 :

$$\text{(E)} \qquad y' + 3y = (x+3)\mathrm{e}^{-2x}$$

1. Si (E_0) est l'équation sans second membre attachée à (E), trouver l'ensemble des solutions y_0 de (E_0).
2. Trouver une solution particulière de (E) par la méthode de la variation de la constante.
3. En déduire la solution générale de (E).

Exercice 4 :

1. Donner le développement limité à l'ordre 5 en $x_0 = 0$ des fonctions sin et cos.
2. Écrire la formule de $\sin(2x)$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.
3. En déduire le développement limité à l'ordre 5 en $x_0 = 0$ de la fonction $x \mapsto \sin(2x)$.
4. Retrouver ce même développement limité (à l'ordre 5 en $x_0 = 0$) en développant directement la fonction $x \mapsto \sin(2x)$ en $x_0 = 0$.

Exercice 5 : [Hors barème]
Soit $C^2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et soit, pour $y \in C^2(\mathbb{R})$, l'équation différentielle d'ordre 2 :

$$\text{(e)} \qquad y'' - 2y' + y = 0.$$

1. Écrire et trouver les racines de l'équation caractéristique attachée à (e).
2. En déduire l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions y de (e).
3. Sachant que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $C^2(\mathbb{R})$, préciser sa dimension et donner une base de celui-ci.
