L1-MS2 - 2010/2011 - **Examen du 11 mai 2011** - Session 1

Examen de Mathématiques pour les Sciences (MS2)

Durée: **3** heures – Les documents, les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés

---

Exercice 1 :

1. (a) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $\dfrac{X+3}{X^3-X}$.

   (b) En déduire la valeur de l'intégrale : $I = \displaystyle\int_2^3 \frac{x+3}{x^3-x}\,\mathrm{d}x$.

2. (a) Quelle est la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de la fraction rationnelle $\dfrac{X+1}{2X^2+3X+2}$?

   (b) Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{2x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 :

1. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}^*$, $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{(t^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}t$.

   (a) Calculer $I_1(x)$.

   (b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, la récurrence entre I_{n+1} et I_n suivante :

$$2na^2 I_{n+1}(x) = x(x^2+a^2)^{-n} + (2n-1)I_n(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

2. (a) Mettre x^2+4x+5 sous la forme $(x+b)^2+a^2$ avec a, b que l'on précisera.

   (b) Calculer une primitive F de la fonction $f(x) = \dfrac{x+1}{(x^2+4x+5)^2}$.

   (Indication : utiliser la récurrence établié precédemment pour calculer *une partie* de $\int f(x)\,\mathrm{d}x$)

Exercice 3 : Soit $f(x) = \dfrac{\sin x + \sin(2x)}{\cos x + \cos(2x)}$.

1. Donner les expressions de $\sin(2x)$ et de $\cos(2x)$ en fonction de $\sin x$, $\cos x$ et en déduire le domaine D de définition de f. Admet-elle de primitive sur chaque intervalle ouvert I contenu dans ce domaine (justifier) ?
2. Sur un tel intervalle I, calculer (par changement de variable approprié) une primitive F de f.

Exercice 4 : On veut trouver l'ensemble de fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^4 qui vérifient l'équation différentielle d'ordre 4 :

$$\text{(E)} \qquad y^{(4)} + 2y'' = \sin x + 4x$$

1. (a) En faisant un changement de fonction inconnue $z = y''$ se ramener à une équation différentielle d'ordre 2 en z, que l'on écrira et notera (e).

   (b) Si (e_0) est l'équation sans second membre attachée à (e), écrire l'équation caractéristique et en déduire l'ensemble des solutions z_0 de (e_0).

   (c) Trouver une solution particulière de (e) (indication : utiliser le principe de superposition des solutions).

   (d) En déduire la solution générale de (e).
2. Revenir sur le changement de fonction inconnue et calculer la solution générale y de (E).

Exercice 5 : On se propose d'étudier la limite :

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{x^4 \log(1+x)}{2\cos(\sin x) - 2 - x^2}.$$

1. Donner le développement limité à l'ordre 5 en $x_0 = 0$ des fonctions sin et cos.
2. En déduire le développement limité à l'ordre 5 en $x_0 = 0$ de la fonction composée $x \mapsto \cos(\sin x)$.
3. Étudier la limite L et donner sa valeur si elle existe.