CORRIGÉ de L'EXAMEN DE MATHÉMATIQUES POUR SCIENCES

L1 - S2 - année 2010-2011 SESSION 2 (21 juin 2010)

EXERCICE 1 : ① $X^3-8=(X-2)(X^2+2X+4)$ car le polynôme de $d^o=2$ a le discriminant $\Delta = i\cdot 2\sqrt{3} \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

② Par division euclidienne : $\frac{X^4+1}{X^3-8} = X + \frac{8X+1}{X^3-8} = X + F(X)$

$F(X) \underset{(1)}{=} \frac{a}{X-2} + \frac{bX+c}{X^2+2X+4}$ et on déduit après calcul :

$$\frac{X^4+1}{X^3-8} = X + \frac{17/12}{X-2} - \frac{1}{12}\,\frac{17X-28}{X^2+2X+4}$$

③ $x^2+2x+4 = (x^2+2x+1)+3 = (x+1)^2+(\sqrt{3})^2 \Rightarrow \begin{cases} a=\sqrt{3} \\ b=1 \end{cases}$

④ $I = \int_{-1}^{0} \frac{(x+1)'dx}{(x+1)^2+(\sqrt{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\text{Arctan}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}$

⑤ $J = \int_{-1}^{0} x\,dx + \frac{17}{12}\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x-2} - \frac{1}{24}\int_{-1}^{0}\frac{17(2X+2)+(34-2\cdot 28)}{x^2+2x+4}dx$

$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \frac{17}{12}\left[\ln|x-2|\right]_{-1}^{0} - \frac{17}{24}\int_{-1}^{0}\frac{(x^2+2x+4)'}{x^2+2x+4}dx + \frac{11}{12}\cdot I$

$= -\frac{1}{2} + \frac{17}{12}\ln\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{17}{24}\left[\ln(x^2+2x+4)\right]_{-1}^{0} + \frac{11\pi}{72\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{J = -\frac{1}{2} + \frac{11\pi}{72\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\ln 3}$

EXERCICE 2 : ① $\tan' x = 1+\tan^2 x$

② $I = \int_0^{\pi/4} x\tan^2 x\,dx \underset{(1)}{=} -\int_0^{\pi/4} x\,dx + \int_0^{\pi/4} x(\tan x)'dx$

$= -\frac{\pi^2}{16} + \left[x\tan x\right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} x'\tan x\,dx =$

$= -\frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{4} + \int_0^{\pi/4}\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx = -\frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{4} + \left[\ln|\cos x|\right]_0^{\pi/4} \Rightarrow$

$\boxed{I = -\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2}$

EXERCICE 3 . ① Pour $y'+ay=0$ la sol. générale est $y_0(x) = \lambda e^{-\int a\,dx}$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ donc comme ds. notre cas $a(x)=3$ $\forall x$: $\boxed{y_0(x) = \lambda e^{-3x}, \forall\lambda\in\mathbb{R}}$

② Variation de la cte λ : on considère λ comme fonction. Alors en remplaçant dans $y'+ay=b$ on obtient $\lambda'(x) = b(x)e^{+\int a\,dx}$ i.e. $\lambda'(x) = (x+3)e^{-2x}e^{3x}$

$\Rightarrow \lambda(x) = \int(x+3)e^x dx \underset{IPP}{=} xe^x - \int e^x dx + 3\int e^x dx$

$\Rightarrow \lambda(x) = (x+2)e^x + \mu$, $\forall\mu\in\mathbb{R}$.

Donc la sol. particulière recherchée est (on prend $\mu=0$)

$y_p(x) = (x+2)e^{-2x}$

③ Sol. générale de (E) : $\boxed{y(x) = (x+2)e^{-2x} + \mu e^{-3x}, \forall\mu\in\mathbb{R}}$

EXERCICE 4 : ① $\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x)$

$\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon(x)$

② $\sin 2x = 2\sin x\cos x$

③ On fait le produit des DL de (1) :

$\sin 2x \underset{x\to 0}{=} 2\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x) - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{2!\,3!} + \frac{x^5}{4!}\right) =$

$= 2x - 2\cdot\frac{2}{3}x^3 + 2\cdot\frac{1}{6\cdot 4}\left(\frac{1}{5}+2+1\right)x^5 + x^5\varepsilon(x)$

$= 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + x^5\varepsilon(x)$

④ Dans (1) on change x en $2x$ ds. le DL de sin et on obtient

EXERCICE 5 : ① eq. caract : $r^2-2r+1=0 \Rightarrow r_1=r_2=1$

② cf. c.m. $y(x) = (\lambda x+\mu)e^{+rx} = (\lambda x+\mu)e^{+x}$, $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

③ $\mathcal{S} = \text{Vect}\{x\mapsto xe^{+x}\,;\, x\mapsto e^x\}$

$\dim\mathcal{S} = 2$.