CORRIGÉ de L'EXAMEN DE MATHS POUR SCIENCES (MS2)

L1 = 2010 - 2011 — SESSION 1 (11 mai 2011)

EXERCICE 1 : ① $\dfrac{x+3}{x(x-1)(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{x+1}$ et $\begin{cases} A=-3 \\ B=2 \\ C=1 \end{cases}$

$$\int_2^3 \frac{x+3}{x^3-x}dx = -3\int_2^3 \frac{dx}{x} + 2\int_2^3 \frac{dx}{x-1} + \int_2^3 \frac{dx}{x+1} = \Big[-3\ln|x| + 2\ln|x-1| + \ln|x+1|\Big]_2^3$$

$$= 7\ln 2 - 4\ln 3 = \ln(2^7 \cdot 3^{-4}).$$

② Le dénominateur est un polynôme de degré $=2$ à racines complexes, donc irréductible sur $\mathbb{R}$. Donc la fraction est déjà décomposée en éléments simples (vu que le d° du numérateur $=1<2=$ degré du dénominateur). On a :

$$2x^2+3x+2 = 2\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}\right] \text{ et}$$

$$(2x^2+3x+2)' = 4x+3. \text{ Donc :}$$

$$I = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{4x+3}{2x^2+3x+2}dx + \frac{1}{8}\int_0^1 \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2} =$$

$$= \left[\frac{1}{4}\ln(2x^2+3x+2) + \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{4x+3}{\sqrt{7}}\right)\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{7}{2} + \frac{1}{2\sqrt{7}}\left(\arctan\sqrt{7} - \arctan\frac{3}{\sqrt{7}}\right)$$

EXERCICE 2 : (1.a) $I_1(x) = \dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right) + C$ $\forall C\in\mathbb{R}$

(1.b) $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{(t^2+a^2)^n}\cdot(t)'\,dt \overset{\text{IPP}}{=}$

$$= \Big[t(t^2+a^2)^{-n}\Big]_0^x - \int_0^x (-2n(t^2+a^2)^{-n-1})\,t^2\,dt$$

$$= x(x^2+a^2)^{-n} + 2n\int_0^x (t^2+a^2)^{-n-1}(t^2+a^2-a^2)\,dt =$$

$$\overset{\text{IPP}}{=} x(x^2+a^2)^{-n} + 2na^2\underbrace{\int_0^x (t^2+a^2)^{-n-1}dx}_{I_{n+1}} + 2n I_n$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{n+1} = \frac{x}{2na^2}(x^2+a^2)^{-n} + \frac{2n-1}{2na^2}I_n, \quad n\in\mathbb{N}^*}$$

(1.c) $x^2+4x+5 = (x+2)^2+1$

(1.d)
$$\int\frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2}dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x+4}{(x^2+4x+5)^2}dx - \int\frac{dx}{(x^2+4x+5)^2}$$

$$= +\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+4x+5)'}{(x^2+4x+5)^2}dx - \int\frac{(x+2)'}{((x+2)^2+1^2)^2}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+4x+5} - \underbrace{\int\frac{dt}{(t^2+1^2)^2}}_{I_2 \text{ avec } a=1}$$

Donc en utilisant la récurrence précéd. pour $n=2$:

$$I_2 = \frac{t}{2}(t^2+1)^{-1} + \frac{1}{2}\arctan(t) + C, \ \forall C\in\mathbb{R}$$

et comme $t=x+2$ on obtient finalement :

$$\int\frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2}dx = -\frac{x+3}{2(x^2+4x+5)} - \frac{1}{2}\arctan(x+2) + C$$

EXERCICE 3 : ① $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$ et

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$.

$D = \mathbb{R}\setminus\{$points où le dénominateur s'annule$\}$. Or, on a :

$\cos x + \cos 2x = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = (\cos x+1)(2\cos x - 1)$

qui s'annule ssi $x\in \pm\pi + 2\pi\mathbb{Z}$ ou $x\in\pm\frac{\pi}{3}+2\pi\mathbb{Z}$.

Dans tout intervalle I ouvert se trouvant entre deux tels points consécutifs, la fonction f est aussi continue donc elle admet primitives.

② On pourrait faire un changement de variable en observant que $f(x)dx = f(-x)d(-x)$ (Bioche) donc en posant $t=\cos x$, mais alors il faut faire attention à ce que cos soit bijective sur le I choisi. Ou, en utilisant les formules de (1) on a :

$$F(x) = \int\frac{\sin x\,(2\cos x+1)}{(2\cos x-1)(\cos x+1)}dx \quad \text{et comme } -\cos' = \sin$$

on pose $t = \cos x$ (qui est chmt de var. de $I^{ère}$ espèce) et on a : $F(x) = \left[-\int \frac{2t+1}{(2t-1)(t+1)}dt\right]_{t=\cos x}$

Ensuite, on décompose en él. simples et on a :

$F(x) = -\frac{1}{3}\left[\int \frac{2\cdot(2t)'dt}{2t-1} + \int \frac{dt}{t+1}\right]_{t=\cos x} \Rightarrow$

$$\boxed{F(x) = -\frac{1}{3}\ln\left((2\cos x - 1)^2(\cos x + 1)\right) + C, \ \forall C \in \mathbb{R}}$$

EXERCICE 4 : (1a) $(e) : z'' + 2z = \sin x + 4x$

(1b) $(e_0) : z'' + 2z = 0 \Rightarrow r^2 + 2r = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$

d'où la sol. générale de (e_0) :

$$z_0 = A\cos(\sqrt{2}x) + B\sin(\sqrt{2}x), \ \forall A, B \in \mathbb{R}$$

(1c) Soit $(e_1) : z'' + 2z = \sin x$ et $(e_2) : z'' + 2z = 4x$

On remarque le fait que le membre de droite des eq. (e_1) et (e_2) est du type expo-poly : Pour (e_1), on la voit comme partie imaginaire de l'équation (complexe) $z'' + 2z = e^{ix}$ qui a un second membre du type expo-polynôme : $P(x)e^{mx}$ avec $m = i \neq \pm i\sqrt{2} = r_{1,2}$, donc on cherche une sol. part. de (e_1) sous la forme $z_1 = Q(x)e^{ix}$ avec $d^0Q = d^0P = 0$ ce qui, en revenant sur des fonctions réelles revient à proposer une sol. du type $z_1 = \alpha\cos x + \beta\sin x$, d'où :

$(e_1) \Rightarrow (2\alpha - \alpha)\cos x + (-\beta - 1 + 2\beta)\sin x = 0 \ \forall x \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = 0\\ \beta = 1\end{cases}$

donc $z_1 = \sin x$ convient

Pour (e_2) on voit $4x = 4xe^{0x}$ donc $\equiv P(x)e^{mx}$ avec à nouveau $m = 0 \neq \pm i\sqrt{2} = r_{1,2}$ donc on propose, (vu que $4x$ est poly. de $d^0 = 1$) $z_2 = (ax+b)e^{0x}$ et en remplaçant en (e_2) on a : $(a+2b) + 2(a-2)x = 0 \ \forall x$

$\Leftrightarrow a = 2$ et $b = -1$ d'où $z_2 = 2x - 1$.

Conclusion : une sol. part. z_p de (e) : $z_p = \sin x + (2x-1)$

(1d) $z = A\cos(\sqrt{2}x) + B\sin(\sqrt{2}x) + \sin x + 2x - 1 \quad \forall (A,B) \in \mathbb{R}^2$

(2) Pour trouver y on intègre par deux fois $y'' = z$:

$$y = A\cos(\sqrt{2}x) + B\sin(\sqrt{2}x) - \sin x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + Cx + D$$
$$\forall (A,B,C,D) \in \mathbb{R}^4$$

EXERCICE 5 au point $x_0 = 0$ on a :

(1) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x)$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon(x)$

(2) On prend $P(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ et $Q(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$, on calcule la composée $(P\circ Q)(x) = 1 - \frac{1}{2!}(Q(x))^2 + \frac{1}{4!}(Q(x))^4$ en ne retenant que les monômes de degré ≤ 5. On a :

$\cos(\sin x) \simeq 1 - \frac{1}{2!}\left(x^2 - 2x\frac{x^3}{3!}\right) + \frac{1}{4!}x^4 = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + x^5\varepsilon(x)$

(3) $L = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^4\log(1+x)}{\cancel{2} - \cancel{2\cdot\frac{1}{2}x^2} + 2\cdot\frac{1}{\cancel{8}4}x^4 + x^5\varepsilon(x) - \cancel{2} - \cancel{x^2}}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x + x\varepsilon(x)}{1/4 + x\varepsilon(x)} = 0$

(Nous avons utilisé $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-x)^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$ obtenu par intégration du développmt en $x_0 = 0$ de $\frac{1}{1+x}$)