Examen de Mathématiques pour les Sciences (MS2)

Durée: **2** heures
Les documents, les calculatrices et les téléphones mobiles ne sont pas autorisés

---

Exercice 1 : **a)** Calculer par intégration par parties (abrégé IPP) une primitive de l'application $f(x) = \arctan x$.
b) Soit $g(x) = x \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$. Donner le domaine de définition de ses primitives et calculer une telle primitive par IPP.

Exercice 2 : On se propose de calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{3x}}\,\mathrm{d}x$.
1.a) Soit $P(t) = 1 + t^3$. Factoriser ce polynôme sur $\mathbb{R}$.
1.b) En déduire la décomposition en éléments simples de la fraction $f(t) = \dfrac{1}{P(t)}$.
2) En déduire la valeur de l'intégrale $J = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$.
3) Effectuer un changement de variable convenable dans I qui permettra de la calculer en fonction de J.

Exercice 3 : On veut résoudre l'équation différentielle *réelle* :

$$y'' - 2y' + 2y = \sin x + x\mathrm{e}^{2x}. \qquad \text{(E)}$$

1) Résoudre l'équation différentielle réelle homogène attachée à (E), à savoir :

$$y'' - 2y' + 2y = 0. \qquad (\mathrm{E}_0)$$

Présenter l'ensemble des solutions réelles de (E_0) sous la forme d'un espace vectoriel réel dont on précisera la dimension.
2) Trouver une solution particulière réelle (qu'on notera y_1) de l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 2y' + 2y = \sin x. \qquad (\mathrm{E}_1)$$

3) Trouver une solution particulière réelle (qu'on notera y_2) de l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 2y' + 2y = x\mathrm{e}^{2x}. \qquad (\mathrm{E}_2)$$

4) En déduire l'ensemble des solutions réelles de (E) (justifier brièvement).

Tourner la page s.v.p. —>

Exercice 4 : Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xy\mathrm{e}^{x-y}$.

1) Calculer ses dérivées partielles (qu'on notera par $\partial_x f \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$ et $\partial_y f \equiv \frac{\partial f}{\partial y}$).

2) Montrer que f admet seulement deux points critiques, à savoir $(0,0)$ et $(-1,1)$.

3) Calculer les dérivées partielles secondes $\partial_{xx} f, \partial_{yx} f, \partial_{xy} f$ et $\partial_{yy} f$ en un point arbitraire (x,y).

4) Calculer la valeur du déterminant

$$\Delta(x,y) = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}.$$

dans les deux point critiques $(0,0)$ et $(-1,1)$.

5) En déduire pour chacun de ces deux point critiques de f s'il s'agit d'un point d'extremum local (préciser, le cas échéant, si c'est un min ou un max) ou bien d'un point de selle.

Exercice 5 : [hors barème]

Montrer que $I = \displaystyle\int_A^B \frac{1}{x \cdot (\ln x) \cdot \ln(\ln x)}\, \mathrm{d}x = \ln 2$ si $A = \mathrm{e}^{\mathrm{e}}$ et $B = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^2}$ (rappel : $\ln \mathrm{e} = 1$).

(Indication : $(\ln u)' = u'/u$ où u est une fonction dérivable à choisir convenablement)

Nota bene : Réponses concises + trêve de bla-bla = temps épargné + correcteur bienveillant