Examen de Mathématiques pour les Sciences (MS2)

Durée: **3** heures

Les documents, les calculatrices et les téléphones mobiles ne sont pas autorisés

---

Exercice 1 : **a)** Calculer une primitive de l'application $y \mapsto y\ln(y^2+1)$.
b) Soit $I = \int_2^3 x\ln[(x-2)^2+1]\,\mathrm{d}x$. En posant $y = x-2$, montrer que $I = I_1 + 2I_2$ où

$$I_1 = \int_0^1 y\ln(y^2+1)\,\mathrm{d}y \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^1 \ln(y^2+1)\,\mathrm{d}y.$$

c) Calculer I_2 à l'aide d'une intégration par parties.
d) En déduire la valeur de I.

Exercice 2 : On se propose de calculer les intégrales I, J, K ci-dessous.
1.a) Soit $P(t) = t^3+t^2+t+1$. Factoriser ce polynôme sur $\mathbb{R}$.
(Indication : une de ses racines est le complexe i).
1.b) En déduire la décomposition en éléments simples de la fraction $f(t) = \dfrac{t}{P(t)}$.
1.c) En déduire la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$
2.a) Écrire une formule qui relie $\sin t$ à $\cos(2t)$.
2.b) Calculer l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2t)}{1+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$.
3.a) Donner le domaine de définition de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$ et le domaine de définition d'une de ses primitives (justifier brièvement) ; ensuite calculer l'expression d'une telle primitive.
3.b) En déduire (par un changement de variables inspiré par (2.a)) la valeur de l'intégrale

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2t)}{\sqrt{1+\sin^2 t}}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 3 : On se propose de résoudre sur $I =]0,\pi[$ l'équation différentielle :

$$y'\sin x - y\cos x = 2x\sin^2 x. \qquad (*)$$

1) Justifier pourquoi $(*)$ équivaut sur I à

$$y' - y\,\mathrm{cotan}\,x = 2x\sin x. \qquad \text{(E)}$$

2) Résoudre sur I l'équation différentielle homogène attachée à (E), à savoir :

$$y' - y\,\mathrm{cotan}\,x = 0. \qquad (\mathrm{E}_0)$$

Présenter l'ensemble des solutions de (E_0) sous la forme d'un espace vectoriel.
3) Trouver une solution particulière de l'équation (E).
4) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Tourner la page s.v.p. —>

Exercice 4 : Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \mathrm{e}^{xy}$.

1) Calculer ses dérivées partielles (qu'on notera par $\partial_x f \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$ et $\partial_y f \equiv \frac{\partial f}{\partial y}$).

2) Montrer que f admet un seul point critique (x_0, y_0) qu'on spécifiera.

3) Calculer les dérivées partielles secondes $\partial_{xx} f, \partial_{yx} f, \partial_{xy} f$ et $\partial_{yy} f$ en un point arbitraire (x,y).

4) Calculer la valeur dans le point critique (x_0, y_0) trouvé précédemment du déterminant

$$\Delta(x_0, y_0) = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

5) En déduire si le point critique de f est un point d'extremum local (min ou max) ou bien un point de selle.

Exercice 5 : On se propose de trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables, telles que

$$(*) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad 2f'(x) + 3f(-x) = x^2 + 1.$$

1) Justifier pourquoi peut-on dériver chaque membre de $(*)$. Après dérivation, on obtiendra pour tout $x \in \mathbb{R}$ une égalité que l'on notera par $(**)$.

2) A l'aide de $(*)$ et de $(**)$, trouver une équation différentielle du second ordre d'inconnue $y = f(x)$ que l'on notera par (E).

3) Résoudre l'équation sans second membre (E_0) attachée à (E).

4) Trouver une solution particulière de (E) et préciser ensuite l'ensemble de toutes ses solutions.

5) Remplacer le résultat obtenu dans $(*)$ pour trouver l'ensemble de fonctions recherché.

Nota bene : Réponses concises + trêve de bla-bla = temps épargné + correcteur bienveillant