CORRIGÉ DE L'EXAMEN DE MATHÉMATIQUES POUR SCIENCES

L1 – MPI – S2 2009 – 2010 – SESSION 2

EXERCICE 1 : On note $\int \varphi(x)\,dx$ l'ensemble des primitives de φ, autrement dit, "une" primitive générique.

a) $\boxed{\int \arctan x\,dx = \int (x)'\arctan x\,dx \underset{IPP}{=} x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\arctan x + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) + C,\ \forall C\in\mathbb{R}}$

b) $\int x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx = \frac{1}{2}\int (x^2)'\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx \overset{IPP}{=}$

$= \frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{1}{2}\int x^2 \cdot \frac{\cancel{1-x}}{1+x}\cdot\frac{(1+x)'(1-x)-(1+x)(1-x)'}{(1-x)^{\cancel{2}}}dx$

$= \frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \int \frac{-x^2}{1-x^2}dx =$

$= \frac{1}{2}x^2\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + x - \int \frac{dx}{1-x^2}$

Or $\int \frac{dx}{1-x^2} = \int \frac{dx}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{1-x} = \frac{1}{2}\ln(1-x^2)$

Donc sur $I =]-1,1[$, i.e. là où $x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$ (mais aussi $x\mapsto 1-x^2$) est bien définie et strictement positive, on a $x\mapsto x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ continue, donc admettant primitive. On a donc sur I :

$\boxed{\int x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx = x^2\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + x - \ln\sqrt{1-x^2} + C,\ \forall C\in\mathbb{R}}$

EXERCICE 2 : 1.a) $P(t) = (1+t)(1-t+t^2)$

1.b) $\frac{1}{P(t)} = \frac{a}{1+t} + \frac{bx+c}{1-t+t^2} \overset{\text{calculs}}{\Longrightarrow} \begin{cases} a=-b=\frac{1}{3} \\ c=\frac{2}{3}\end{cases}$

$\Rightarrow \frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{-t+2}{1-t+t^2}\right)$

2) $J = \frac{1}{3}\int_1^2\frac{dt}{1+t} - \frac{1}{6}\int_1^2\frac{(2t-1)-3}{t^2-t+1} =$

$= \frac{1}{3}\left[\ln(1+t)\right]_1^2 - \frac{1}{6}\int_1^2\frac{(t^2-t+1)'}{t^2-t+1}dt + \frac{1}{2}\int_1^2\frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

$= \frac{1}{3}\left[\ln\frac{1+t}{\sqrt{t^2-t+1}}\right]_1^2 + \left[\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{t-1/2}{\sqrt{3}/2}\right)\right]_1^2$

$= \frac{1}{3}\left(\ln\frac{3}{\sqrt{3}} - \ln 2\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\underbrace{\operatorname{Arctan}\sqrt{3}}_{=\pi/3} - \underbrace{\operatorname{Arctan}\frac{1}{\sqrt{3}}}_{=\pi/6}\right)$

$\Rightarrow \boxed{J = \frac{1}{3}\left(\ln\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)}$

3) $I \underset{e^x=t}{=} \int_1^2\frac{dt}{1+t^3} = J.$

EXERCICE 3 : 1) Eq. caracteristique attachée à (E_0) : $r^2-2r+2=0 \Leftrightarrow (r-1)^2+1=0$

$\Rightarrow r_{1,2} = 1\pm i$. Donc d'après CM. la solution générique de (E_0) est de la forme :

$y_0(x) = e^x(A\cos x + B\sin x),\ \forall (A,B)\in\mathbb{R}^2.$

Donc l'ensemble des solutions de (E_0) est un espace vectoriel réel de dimension 2 :

$\mathcal{S}_0 = \operatorname{Vect}\{x\mapsto e^x\sin x,\ x\mapsto e^x\cos x\}.$

2) On pense au fait que $\sin x = \Im m(e^{ix})$ donc (E_1) peut être vue comme la partie imaginaire d'une eq. diff. complexe du type :

$(\tilde{E}_1)$ $y''-2y'+2y = e^{ix}$, à savoir une eq. ayant le membre de droite du type polynôme-exponentielle

i.e. du type $P_1(x)e^{m_1 x}$ avec $P_1(x)=1$ et $m_1 = i \neq 1 \pm i = r_{1,2}$.
Alors cf. thm du cours, on cherche une solution de $(\tilde{E}_1)$ de la forme $Q_1(x)e^{m_1 x}$ avec $d^\circ Q = d^\circ P = 0$, donc de la forme λe^{ix}, donc en ce qui concerne (E_1) on lui cherchera une sol. particulière de la forme
$y_1(x) = a\cos x + b\sin x$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ à trouver.

[Attention! le raisonnement ci-dessus peut être trompeur car puisque "$(E_1) = \mathrm{Im}(\tilde{E}_1)$" on devrait avoir une solution de (E_1) du type $\mathrm{Im}(\lambda e^{ix}) \overset{?}{=} \lambda \sin x$, or cette égalité est fausse car $\lambda \in \mathbb{C}$! En tenant compte de $\lambda \in \mathbb{C}$ on se rend compte que $\mathrm{Im}(\lambda e^{ix})$ est de la forme d'une combinaison linéaire réelle de sin et cos, i.e. le y_1 qu'on a proposé ci-dessus]

En remplaçant y_1 en (E_1) on obtient :

$$\cos x \cdot (a-2b) + \sin x \cdot (2a+b-1) = 0, \ \forall x$$

or cos et sin sont linéairement indépendants,

d'où $\begin{cases} a-2b=0 \\ 2a+b=1 \end{cases} \overset{\text{Cramer}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a = 2/5 \\ b = 1/5 \end{cases}$

donc $\boxed{y_1(x) = \frac{1}{5}(2\cos x + \sin x)}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

3) (E_2) est du type : $y'' - 2y' + 2y = P_2(x)e^{m_2 x}$ avec $P_2(x) = x$ et $m_2 = 2 \neq 1 \pm i = r_{1,2}$, donc on cherche $y_2(x) = Q_2(x)e^{2x}$ avec $d^\circ Q_2 = d^\circ P$ i.e. $Q_2(x) = \alpha x + b$. En remplaçant ds. (E_2) on a : $(2\alpha + 2\beta)\cdot 1 + (2\alpha - 1)\cdot x = 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha = 1 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = 1/2 = -\beta \Rightarrow \boxed{y_2(x) = \frac{1}{2}(x-1)e^{2x}}$

4) Par le principe de superposition des solutions, "la" solution générique de (E) est du type : $y = y_0 + y_1 + y_2$

donc $y(x) = e^{x}(A\cos x + B\sin x) + \frac{1}{5}(2\cos x + \sin x) + \frac{1}{2}(x-1)e^{2x}$
$\forall (A,B) \in \mathbb{R}^2$

EXERCICE 4 :

1) $\partial_x f = (x+1)ye^{x-y}$; $\partial_y f = x(1-y)e^{x-y}$

2) $\partial_x f = 0 = \partial_y f \Leftrightarrow \begin{cases} y(x+1) = 0 \\ x(1-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y=0 \text{ et } x=0) \\ \text{ou } (x=-1 \text{ et } y=1) \end{cases}$

3) $\partial_{xx} f = (x+2)ye^{x-y}$; $\partial_{yy} f = x(y-2)e^{x-y}$
$\partial_{xy} f = \partial_{yx} f = (x+1)(1-y)e^{x-y}$

4) $\Delta(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$; $\Delta(-1,1) = \begin{vmatrix} e^{-2} & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{vmatrix} = e^{-4} > 0$

5) $\Delta(0,0) < 0$ donc $(0,0)$ est point de selle (de col)
$\Delta(-1,1) > 0$ et $\partial_{xx} f(-1,1) = e^{-2} > 0$ donc $(-1,1)$ est pt. de minimum local pour f.

EXERCICE 5 :

Sur $[A,B] \equiv [e^e, e^{e^2}]$ les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto \ln(\ln x)$ sont bien définies et continues donc intégrables. Donc I est bien définie. On a :

$\frac{1}{x} = (\ln x)'$ et en choisissant $u = \ln x$ on a aussi $\frac{u'}{u} = (\ln u)'$, i.e. $\frac{(\ln x)'}{\ln(\ln x)} = (\ln(\ln x))'$.

Donc $I = \int_A^B \frac{(\ln x)'}{\ln x} \cdot \frac{1}{\ln(\ln x)} dx = \int_A^B \frac{(\ln(\ln x))'}{\ln(\ln x)} dx$

$= [\ln(\ln(\ln x))]_A^B = \ln(\ln(\ln e^{e^2})) - \ln(\ln(\ln e^{e^1}))$

$\Longrightarrow \boxed{I = \ln 2}$