L1 - MPI - S2 - 2009-2010 • SESSION 1

CORRIGÉ de l'EXAMEN de MATHS pour SCIENCES

(MS2 - 19 mai 2010)

EXERCICE 1 :

a Obs : L'application $y \overset{f}{\mapsto} y\ln(y^2+1)$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ (car $y^2+1 \geq 1\ \forall y \in \mathbb{R}$) donc admet primitive :

$$F(x) = \int_0^x y\ln(y^2+1)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^x (y^2+1)'\ln(y^2+1)\,dy \overset{(u\equiv y^2+1)}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{x^2+1} \ln u\,du \overset{\text{IPP}}{=} \frac{1}{2}\left(\left[u\ln u\right]_1^{1+x^2} - \int_1^{1+x^2} \cancel{u}\cdot\frac{1}{\cancel{u}}\,du\right)$$

donc une primitive de f est $\boxed{F(x) = \frac{1}{2}(x^2+1)\left(\ln(y^2+1)-1\right)-\frac{1}{2}}$

b $I = \int_2^3 x\ln\left[(x-2)^2+1\right]dx = \int_2^3 (x-2+2)\ln\left[(x-2)^2+1\right]dx$

$$\underset{y\equiv x-2}{=} \int_0^1 (y+2)\ln(y^2+1)\,dy = I_1 + 2I_2$$

c $I_2 = \int_0^1 y'\ln(y^2+1)\,dy = \left[y\ln(y^2+1)\right]_0^1 - 2\int_0^1 y\frac{2y}{y^2+1}dy$

$$= \ln 2 - 2\int_0^1 \frac{(y^2+1)-1}{y^2+1}dy = \ln 2 - 2\left[y\right]_0^1 + 2\left[\text{Arctan}\,y\right]_0^1$$

$$\Rightarrow \boxed{I_2 = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}}$$

d En utilisant (a) on a : $I_1 = F(1) = \ln 2 - 1 + \frac{1}{2} = \ln 2 - \frac{1}{2}$

Donc, par (b) : $\boxed{I = 2I_2 + I_1 = 3\ln 2 - \frac{9}{2} + \pi}$

EXERCICE 2 :

1.a $P(t) = (t+1)(t^2+1)$.

1.b $f(t) \equiv \dfrac{t}{(t+1)(t^2+1)} = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{t+1} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{t+1}{t^2+1}$.

1.c $I = \int_0^1 f(t)dt = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t+1}{t^2+1}\,dt =$

$$= -\frac{1}{2}\left[\ln(t+1)\right]_0^1 + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{(t^2+1)'}{t^2+1}dt + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= -\ln\sqrt{2} + \frac{1}{4}\left[\ln(t^2+1)\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\text{Arctan}\,t\right]_0^1$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}\right)}$$

2.a $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2 t$ (d'où $\sin^2 t = \dfrac{1-\cos 2t}{2}$)

2.b (Utiliser les règles de Bioche!). On peut le faire de plusieurs façons : par ex. (méthode pas si bonne), écrire $\sin(2t) = 2\sin t\cos t \equiv 2\sin t(\sin t)'$, d'où

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin t}{1+(\sin t)^2}(\sin t)'dt \underset{u=\sin t}{=} \int_0^1 \frac{2u}{1+u^2}du = \left[\ln(1+u^2)\right]_0^1 = \ln 2$$

Mieux encore, on peut utiliser (2.a) :

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin(2t)}{3-\cos(2t)}dt = \int_0^{\pi/2} \frac{(3-\cos(2t))'}{3-\cos(2t)}dt = \left[\ln(3-\cos 2t)\right]_0^{\pi/2} = \ln 4 - \ln 2$$

$$\Longrightarrow \boxed{J = \ln 2}$$

3.a Dom. de définition de $x \overset{g}{\mapsto} \dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$ est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ t.q. $3-x > 0$ i.e. $]-\infty, 3[$. Sur cet intervalle la fonction g est continue donc elle admet primitives. Une telle primitive est $G(y) = \int_0^y \dfrac{dx}{\sqrt{3-x}}$ (où $y < 3$).

$$G(y) = -\int_0^y \frac{(3-x)'}{\sqrt{3-x}}dx \underset{t=3-x}{=} -\int_3^{3-y}\frac{dy}{\sqrt{y}} = -2\left[\sqrt{y}\right]_3^{3-y}$$

$$\Rightarrow \boxed{G(y) = 2\left(\sqrt{3} - \sqrt{3-y}\right),\ \forall y < 3}$$

3.b On se sert de (2.a) et on obtient :

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{2}\sin(2t)}{\sqrt{3-\cos(2t)}}dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{(3-\cos(2t))'}{\sqrt{3-\cos(2t)}}dt \underset{\substack{(y=3-\cos(2t))\\ \text{obs}: y<3}}{=}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_2^4 \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{y}\right]_2^4 = \sqrt{2}(2-\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow \boxed{K = 2(\sqrt{2} - 1)}$$

EXERCICE 3 :

1 Sur $I =]0,\pi[$ on a $\sin > 0$, donc on peut diviser par $\sin x$ en $(*)$ pour obtenir une égalité équivalente (sur I), à savoir (E), qui est l'équation normalisée correspondant à $(*)$. (Rappel : $\text{cotan} = \frac{\cos}{\sin}$)

2 (E_0) est du type : $y' + a(x)\,y = 0$, dont l'ensemble des solutions est un $\mathbb{R}$-e.v. de dim $= 1$ de la forme :

$$\mathcal{S}_0 = \text{Vect}\left\{ x \underset{y_0}{\longmapsto} e^{-\int_0^x a(t)dt} \right\}.$$

Or $-\int_\alpha^x a(t)dt = \int_\alpha^x \text{cotan}(t)\,dt = \int_\alpha^x \frac{(\sin t)'}{\sin t}\,dt = \Big[\ln|\sin t|\Big]_\alpha^x$

où $\alpha, x \in I =]0,\pi[$ donc $|\sin t| = \sin t \ \ \forall t \in [\alpha, x]$.

Donc une solution de (E_0) sera du type

$y_0(x) = e^{\ln(\sin x)} e^{-\ln(\sin\alpha)} = C_\alpha \sin x$. Donc :

$$\boxed{\mathcal{S}_0 = \text{Vect}\{\sin\} \quad \text{sur} \quad I =]0,\pi[}$$

3 Comme on ne voit pas de sol. particulière évidente pour (E) on fait la "variation de la constante", i.e. on propose une sol. particulière du type $y_p(x) = \lambda(x)\,y_0(x)$ où y_0 = une solution de (E_0). En remplaçant en (E) :

$\lambda' y_0 + \lambda \underbrace{\left(y_0' - y_0 \,\text{cotan}\, x\right)}_{=0} = 2x \sin x \iff$ ($\sin x > 0$ sur I)

$\lambda' = 2x \implies \lambda(x) = x^2$ (on choisit une primitive de λ seulement)

Donc une des sol. particulières de (E) recherchées est :

$$\boxed{y_p(x) = x^2 \sin x \quad , x \in I =]0,\pi[}.$$

4 L'ensemble des solutions de (E) (et donc par (1) de $(*)$ aussi) est l'espace affine de dim. $= 1$:

$\mathcal{S} = \text{Vect}\{\sin\} + \{(\cdot)^2 \sin\}$.

Autrement dit, l'ensemble des solutions y de E est donné par $\boxed{y(x) = \lambda \sin x + x^2 \sin x \ , \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in]0,\pi[}$

EXERCICE 4 :

1 $(\partial_x f)(x,y) = y e^{xy}$; $(\partial_y f)(x,y) = x e^{xy}$.

2 $\partial_x f$ et $\partial_y f$ existent partout sur $\mathbb{R}^2$, donc (x_0, y_0) est point critique ssi $(\partial_x f)(x_0,y_0) = 0 = (\partial_y f)(x_0,y_0)$. Or, avec (1), l'exponentielle étant > 0, ceci équivaut à $(x_0, y_0) = (0,0)$ seulement. C'est le seul point critique.

3 $\partial_{xx} f \equiv \partial_x(\partial_x f) = y^2 e^{xy}$; $\partial_{yy} f \equiv \partial_y(\partial_y f) = x^2 e^{xy}$

$\partial_{xy} f \equiv \partial_x(\partial_y f) = (1+xy)\,e^{xy} = \partial_y(\partial_x f) \equiv \partial_{yx} f$

4 En $(x_0,y_0) = (0,0)$ on a $\Delta(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$

5 $\Delta(0,0) < 0$ donc $(0,0)$ est un point-selle (ou "col").

EXERCICE 5 :

1 $(*) \iff f'(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + 1 - 3f(-x)\right), \forall x$ et comme le membre de droite est combinaison linéaire de fonctions dérivables $\implies f'$ est dérivable $\implies$ récurrence $\implies f \in C^\infty$ en fait..

2 Dérivant, on a $\boxed{\underline{\underline{\forall x}} : 2f''(x) - 3f'(-x) = 2x \quad (**)}.$

On multiplie $(**)$ par 2 et on l'additionne à $(*)$ multipliée par 3 après l'avoir écrite pour $-x$ à la place de x. On obtient : (E) $\boxed{4f''(x) + 9f(x) = 3x^2 + 4x + 3 \ , \forall x \in \mathbb{R}}$

3 $(E_0) : 4y'' + 9y = 0 \implies$ eq. caract. $4r^2 + 9 = 0 \implies r_{1,2} = \pm i\frac{3}{2}$

Donc l'ensemble des solutions de (E_0) est un $\mathbb{R}$-e.v. de dim $= 2$, $\mathcal{S}_0$:

$\boxed{\forall y_0 \in \mathcal{S}_0, \exists A, B \in \mathbb{R} \text{ t.q. } y_0(x) = A\cos\left(\frac{3x}{2}\right) + B\sin\left(\frac{3x}{2}\right), \forall x \in \mathbb{R}}$

4 Le membre de droite de (E) est du type $P(x)e^{mx}$ avec $m = 0 \neq r_{1,2}$ donc on cherche une sol. particulière $y_p(x) = Q(x)e^{0\cdot x}$ avec $d^\circ Q = d^\circ P$, donc on propose $Q(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$. En la remplaçant ds (E) et par identification on trouve $\boxed{Q(x) = \frac{1}{27}(1 + 12x + 9x^2)}$.

Donc $\forall y \in \mathcal{S}$ = ens. des sol. de (E) on a : $\boxed{y(x) = y_0(x) + Q(x)}$

5 Depuis (1) à (4) on a obtenu y ci dessus comme "$\implies$" de $(*)$. Maintenant il faut imposer à y que "$\Leftarrow$" soit vraie aussi : on le remplace en $(*)$ et après calculs on obtient : $(A+B)\left(\cos\left(\frac{3x}{2}\right) - \sin\left(\frac{3x}{2}\right)\right) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ ce qui implique $\boxed{A = -B}$. Donc les f qui vérifient $(*)$ sont :

$$\boxed{f_A(x) = A\left(\cos\left(\tfrac{3x}{2}\right) - \sin\left(\tfrac{3x}{2}\right)\right) + \frac{1}{27}(1 + 12x + 9x^2) \quad \forall A \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}}$$