Université de Cergy-Pontoise — 2008–2009
MPI-MS2

# Devoir Maison 1

(à rendre dans la semaine du 2 mars)

**Exercice 1**

Soit $P(X) = 6X^3 + 19X^2 + 11X - 6$, $Q(X) = 3X^2 + 5X - 2$ et $R(X) = 2X + 3$.
Effectuer les divisions euclidiennes

1. de $P(X)$ par $Q(X)$,
2. de $P(X)$ par $Q(X) + R(X)$.

**Exercice 2**

1. Soit
$$\begin{aligned} A(X) &= X^9 + 2X^8 - 16X^6 - 39X^5 - 34X^4 - 10X^3 + X\,, \\ B(X) &= X^7 + 4X^6 + 10X^5 + 12X^4 + 5X^3\,. \end{aligned}$$
Montrer que la division euclidienne de $A(X)$ par $B(X)$ est $A(X) = B(X)Q(X) + R(X)$ avec $Q(X) = X^2 - 2X - 2$ et $R(X) = X$.
2. Montrer que $B(X)$ peut se factoriser sous la forme $B(X) = X^3(X+1)^2(X^2 + 2X + 5)$ ?
3. Quelle est la décomposition en éléments simples théorique de $\frac{R(X)}{B(X)}$ dans $\mathbb{R}$ ?
4. Calculer les coefficients pour chaque élément simple.
5. En déduire les primitives $\displaystyle\int^x \frac{R(t)}{B(t)}dt$.

**Exercice 3**

Soit $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 + \sin x}$ , $u(x) = \tan(x/2)$.

1. Calculer le produit $g(x) = f(x)(u'(x))^{-1}$.
2. En déduire qu'il existe une fonction rationnelle $G$ telle que $g(x) = G(u(x))$.
3. Décomposer $G$ en éléments simples.
4. En déduire une primitive de $f$.

**Exercice 4**

Une primitive $F(x)$ d'une fonction rationnelle de la forme $f(x) = \frac{1}{(x-\alpha)^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, est donnée par

$$F(x) = \begin{cases} \frac{(x-\alpha)^{-n+1}}{-n+1}, & \text{si } n \neq 1 \\ \ln|x - \alpha|, & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

Décomposer la fraction rationnelle

$$g(x) = \frac{ax^2 - 22x + b}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

ou $a, b \in \mathbb{R}$. Quelle relation doivent vérifier $a$ et $b$ pour que les primitives de $g$ soient des fractiones rationnelles ?