L1-MS2 - 2008/2009 - **Examen du 19 juin 2009** - Session 2

Examen de Mathématiques pour les Sciences (MS2)

Durée: **2** heures – Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés

---

Exercice 1 : 1. Pour $a \neq 0$, donner la dérivée de la fonction $x \mapsto \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x}{a}\right)$.

2. En déduire, par intégration par parties, la valeur de l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^2 (2+x)\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$.

Exercice 2 : 1. Calculer $J_1 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x \,\mathrm{d}x$.

2. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n \,\mathrm{d}x$. Trouver (par intégration par parties), une relation de récurrence entre J_{n+1} et J_n.

Exercice 3 : On se propose de résoudre l'équation différentielle de fonction inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$(\mathbf{E}) \qquad y'' + 2y' + y = 2\sin^2 x.$$

1. Soit $(\mathbf{E}_0)$ l'équation sans second membre (homogène) attachée à $(\mathbf{E})$. Écrire et résoudre l'équation caractéristique associée à $(\mathbf{E}_0)$.
2. Donner la solution générale y_0 de $(\mathbf{E}_0)$.
3. Soient les équations :

$$\begin{array}{ll} (\mathbf{E}_1) & y'' + 2y' + y = 1, \\ (\mathbf{E}_2) & y'' + 2y' + y = -\cos(2x). \end{array}$$

   Notons par y_1, respectivement par y_2, une solution particulière de chacune de ces équations. Montrer qu'une solution particulière de $(\mathbf{E})$ est somme de y_1 et y_2. (Indication : linéariser $\sin^2 x$).
4. Trouver explicitement deux solutions particulières y_1 et y_2, des équations $(\mathbf{E}_1)$ et $(\mathbf{E}_2)$, respectivement.
5. En déduire la solution générale de $(\mathbf{E})$.

Exercice 4 : Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}y^3 - x^2 - 3x - 4y - 3$.

1. Calculer ses dérivées partielles premières (qu'on notera par $\partial_x f \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$ et $\partial_y f \equiv \frac{\partial f}{\partial y}$).
2. Montrer que f admet seulement les 4 points critiques suivants : $(3,1)$, $(3,-1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$.
3. Calculer en chaque point $(x,y) \in \mathbb{R}$ les dérivées partielles secondes de f (notées $\partial_{xx} f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\partial_{xy} f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\partial_{yx} f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\partial_{yy} f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$).
4. Montrer que, pour chaque $(x,y) \in \mathbb{R}$, le déterminant $\det H(x,y) = \begin{vmatrix} \partial_{xx} f(x,y) & \partial_{xy} f(x,y) \\ \partial_{yx} f(x,y) & \partial_{yy} f(x,y) \end{vmatrix}$ s'écrit comme un produit $P(x)Q(y)$ où P et Q sont des polynômes que l'on trouvera.
5. Calculer $\det H(x_i, y_i)$ où (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, 4$, sont les points critiques de f donnés précédemment.
6. Pour chacun des quatre points critiques décider s'il s'agit d'un extremum local (minimum ou maximum ?) ou d'un point de col (selle) pour la fonction f.

Exercice 5 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f_n(x) = (\cos x)^{2n+1}(\sin x)^{2n}$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Pour les cas $n = 0$ et $n = 1$ calculer une primitive F_0 de f_0, respectivement F_1 de f_1.
2. En faisant le changement de variable $t = \sin x$, montrer, pour $n \in \mathbb{N}$, qu'une primitive F_n de f_n peut s'ecrire comme : $F_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(-1)^k}{2(k+n)+1} (\sin x)^{2(k+n)+1}$.