L1-MS2 - 2008/2009 - **Examen du 20 mai 2009** - Session 1

Examen de Mathématiques pour les Sciences (MS2)

Durée: **3** heures – Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisées

---

Exercice 1 : 1. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et puis sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X(X^2+1)}$.

2. En déduire la valeur de l'intégrale : $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{x}{(x^2+1)^2} \ln x \, \mathrm{d}x$. (Indication : IPP)

Exercice 2 : 1. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} \, \mathrm{d}x$.

2. Soit $f(x) = \dfrac{x \sin x}{1+\cos^2 x}$. Montrer que $f(x) + f(\pi - x) = \dfrac{\pi \sin x}{1+\cos^2 x}$.
3. En déduire la valeur de $J = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} \, \mathrm{d}x$.
4. En calculant l'intégrale J par intégration par parties, déduire de la question précédente la valeur de l'intégrale $K = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{Arctan}(\cos x) \, \mathrm{d}x$.

Exercice 3 : Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit $I_{m,n} = \displaystyle\int_a^b (x-a)^m (b-x)^n \, \mathrm{d}x$, où $(m,n) \in \mathbb{N}^2$.

1. Montrer que $I_{m,n} = \dfrac{m}{n+1} I_{m-1,n+1}$, $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ et $I_{m,n} = \dfrac{n}{m+1} I_{m+1,n-1}$, $\forall (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.
2. Calculer $I_{0,m+n}$ et en déduire que $I_{m,n} = \dfrac{m!n!(b-a)^{m+n+1}}{(m+n+1)!}$.

Exercice 4 : Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3(1-4y^2) + y^2$.

1. Calculer ses dérivées partielles premières (qu'on notera par $\partial_x f \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$ et $\partial_y f \equiv \frac{\partial f}{\partial y}$).
2. Montrer que f admet seulement les 3 points critiques suivants : $(0,0)$, $(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, -\frac{1}{2})$.
3. Calculer en chaque point $(x,y) \in \mathbb{R}$ les dérivées partielles secondes de f (notées $\partial_{xx} f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\partial_{xy} f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\partial_{yx} f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\partial_{yy} f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$).
4. En déduire, pour chaque $(x,y) \in \mathbb{R}$, l'expression du déterminant $\det H(x,y) = \begin{vmatrix} \partial_{xx} f(x,y) & \partial_{xy} f(x,y) \\ \partial_{yx} f(x,y) & \partial_{yy} f(x,y) \end{vmatrix}$.
5. Calculer $\det H(x_i, y_i)$ où (x_i, y_i), $i = 1,2,3$, sont les points critiques de f trouvés précédemment.
6. Pour chacun de ces 3 points discuter et décider si possible s'il s'agit d'un point d'extremum local ou d'un point de col (selle).
7. Calculer $f(0,0)$ et en passant aux coordonnées polaires étudier le signe de $f(x,y)$ dans un voisinage arbitrairement petit de $(0,0)$. Conclure : $f(0,0)$ est-il un extremum local de f ?

Exercice 5 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et notons par F une primitive de f. Soit $(\mathbf{E})$ l'équation différentielle (de fonction inconnue $y : I \to \mathbb{R}$) : $y'' + f\,y' + f'\,y = 0$.

1. Montrer que $(\mathbf{E})$ équivaut à : il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $(\mathbf{e}_C)$: $y' + fy = C$ sur I.
2. Si $(\mathbf{e}'_C)$ est l'équation sans second membre (homogène) attachée à $(\mathbf{e}_C)$, donner la solution générale y_0 de celle-ci (exprimée en fonction de F).
3. Appliquer la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière y_{p} de $(\mathbf{e}_C)$ (exprimée en fonction de F). En déduire la solution générale de $(\mathbf{e}_C)$.
4. Donner la solution générale de $(\mathbf{E})$.
5. Soit, pour $x \in I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $f(x) = \dfrac{\tan x}{3+\cos(2x)}$. Calculer une primitive F de f.
6. En déduire pour ce cas la solution générale de $(\mathbf{E})$ en termes d'une primitive G de $g(x) = \sqrt[4]{2+\tan^2 x}$ (on ne cherchera pas à calculer G explicitement).

Note : *Dans les exercices 4 et 5 la dernière question est un peu plus difficile que les précédentes.*

L1 - Bilingual Group - MS2 - 2008/2009 - **20 May 2009** - Session 1

Examination in Mathematics for Sciences (MS2)

Duration: **3** hours – Documents and any type of calculators are not allowed

---

Exercice 1 : 1. Decompose into simple elements on $\mathbb{C}$, after that on $\mathbb{R}$, the rational fraction $\dfrac{1}{X(X^2+1)}$.

2. Compute the value of the integral : $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{x}{(x^2+1)^2} \ln x \, \mathrm{d}x$. (Hint : first, integration by parts)

Exercice 2 : 1. Calculate $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} \, \mathrm{d}x$.

2. Let $f(x) = \dfrac{x \sin x}{1+\cos^2 x}$. Show the identity : $f(x) + f(\pi - x) = \dfrac{\pi \sin x}{1+\cos^2 x}$.
3. Deduce from the previous questions the value of $J = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} \, \mathrm{d}x$.
4. By computing J directly by integration by parts, infer the value of the integral $K = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{Arctan}(\cos x) \, \mathrm{d}x$.

Exercice 3 : Let $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Let $I_{m,n} = \displaystyle\int_a^b (x-a)^m (b-x)^n \, \mathrm{d}x$, with $(m,n) \in \mathbb{N}^2$.

1. Show that $I_{m,n} = \dfrac{m}{n+1} I_{m-1,n+1}$, $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ and $I_{m,n} = \dfrac{n}{m+1} I_{m+1,n-1}$, $\forall (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.
2. Compute $I_{0,m+n}$ and deduce from the previous questions that $I_{m,n} = \dfrac{m!n!(b-a)^{m+n+1}}{(m+n+1)!}$.

Exercice 4 : Let the function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ be defined by $f(x,y) = x^3(1-4y^2) + y^2$.

1. Compute its first order partial derivatives (denoted as $\partial_x f \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$ and $\partial_y f \equiv \frac{\partial f}{\partial y}$).
2. Show that f has only 3 critical points, namely $(0,0)$, $(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{2})$ and $(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, -\frac{1}{2})$.
3. Compute in each point $(x,y) \in \mathbb{R}$ the second order partial derivatives of f (denoted by $\partial_{xx} f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\partial_{xy} f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\partial_{yx} f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\partial_{yy} f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$).
4. Compute for each $(x,y) \in \mathbb{R}$, the expression of the determinant $\det H(x,y) = \begin{vmatrix} \partial_{xx} f(x,y) & \partial_{xy} f(x,y) \\ \partial_{yx} f(x,y) & \partial_{yy} f(x,y) \end{vmatrix}$.
5. Give the values of $\det H(x_i, y_i)$ where (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$, are the critical points of f.
6. According to the values found at the preceding question, discuss and decide (if possible) on the nature of the critical points (extremum, saddle points ?).
7. Calculate $f(0,0)$. Write the expression of $f(x,y)$ in polar coordinates and use it in order to study the sign of f in an arbitrarily small disk centered on $(0,0)$. Conclude : is $f(0,0)$ or not a local extremum of f ?

Exercice 5 : Let $f : I \to \mathbb{R}$ (with I interval of $\mathbb{R}$) be a differentiable function and let F be an antiderivative of f. Let $(\mathbf{E})$ be the differential equation (with unknown function $y : I \to \mathbb{R}$) : $y'' + f\,y' + f'\,y = 0$.

1. Show that $(\mathbf{E})$ is equivalent to the sentence : there is some $C \in \mathbb{R}$ such that $(\mathbf{e}_C)$: $y' + fy = C$ on I.
2. Denote by $(\mathbf{e}_C^{'})$ the homogenous (null right hand side) equation associated to $(\mathbf{e}_C)$. Give the expression of the general solution y_0 of $(\mathbf{e}_C^{'})$ (as an expression depending on F).
3. Use the variation of the constant method in order to find an expression for a particular solution y_{p} of $(\mathbf{e}_C)$ (as an expression depending on F). Infer from the previous questions the general solution of $(\mathbf{e}_C)$.
4. Give the general solution of $(\mathbf{E})$ (as an expression depending on F).
5. For $x \in I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ let $f(x) = \dfrac{\tan x}{3 + \cos(2x)}$. Compute an antiderivative F of f.
6. Deduce, for this case, the general solution of $(\mathbf{E})$ in termes of an antiderivative G of $g(x) = \sqrt[4]{2 + \tan^2 x}$ (one shall not try to compute G explicitely).

Note : *In the exercises 4 and 5 the last question is lightly harder than the others.*