CORRIGÉ de l'EXAMEN MS2 – SESSION 2 ('08-'09)

EXERCICE 1 : ① $(\text{Arctan}\, u)' = \dfrac{u'}{1+u^2} \Rightarrow \left(\text{Arctan}\dfrac{x}{a}\right)' = \dfrac{a}{a^2+x^2}$

② $I = \int_0^2 \underbrace{\left(2x+\frac{x^2}{2}\right)'}_{u'} \underbrace{\text{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right)}_{v} dx \underset{\text{IPP}}{=}$

$= \left[\left(2x+\frac{x^2}{2}\right)\text{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^2 - \int_0^2 \left(2x+\frac{x^2}{2}\right)\frac{2}{2^2+x^2}dx$

$= (6\,\text{Arctan}\,1 - 0) - \int_0^2 \frac{x^2+4x}{x^2+4}dx =$

$= \frac{3\pi}{2} - \int_0^2 \left(1 + 2\cdot\frac{2x}{x^2+4} - 2\cdot\frac{2}{2^2+x^2}\right)dx$

$= \frac{3\pi}{2} - (2-0) - 2\int_0^2 \frac{(x^2+4)'}{x^2+4}dx - 2\int_0^2 \left(\text{Arctan}\frac{x}{2}\right)'dx$

$= \frac{3\pi}{2} - 2\left(1 + \left[\ln(x^2+4)\right]_0^2 + \left[\text{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^2\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{I = \pi - 2(1+\ln 2)}$

EXERCICE 2 : ① $J_1 = \int_1^e \ln x \cdot (x)'dx \overset{\text{IPP}}{=} [x\ln x]_1^e - \int_1^e \cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}}dx$

$\Rightarrow \boxed{J_1 = 1}$. (Obs : $J_0 = \int_1^e (\ln x)^0 dx = e-1$)

② $J_{n+1} = \int_1^e (\ln x)^{n+1}\cdot(x)'dx = [x(\ln x)^{n+1}]_1^e - \int_1^e \cancel{x}\cdot\frac{n+1}{\cancel{x}}(\ln x)^n dx$

$\Rightarrow \boxed{J_{n+1} = e-(n+1)J_n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

EXERCICE 3 : ① (E_0) : $y''+2y'+y=0$. Eq. caractéristique : $r^2+2r+1=0 \Leftrightarrow (r+1)^2=0 \Rightarrow r_{1,2}=-1$,

② $y_0(x) = (\lambda x+\mu)e^{-x}$ $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

③ $2\sin^2 x = 1+(-\cos(2x))$. Si $y_p \equiv y_1+y_2$ alors en la remplaçant dans (E) on obtient (linéarité de la deriv.)

$(y_1''+2y_1'+y_1)+(y_2''+2y_2'+y_2) = 2\sin^2 x \underset{y_2 \text{ sol de } (E_2)}{\Longleftrightarrow}$

$\Leftrightarrow 1+(-\cos 2x) = 2\sin^2 x$, VRAI $\forall x$.

④ Pour (E_1), $\boxed{y_1 = 1}$ est solution évidente.

Pour (E_2), remarquer que celle-ci est la partie réelle d'une equation en $\mathbb{C}$: $(\tilde{E}_2)$: $y''+2y'+y = P(x)e^{(2i)x}$ où $d^oP = 0$. Or, $2i \neq r_{1,2} = 1$ donc (cf. Thm. du CM.) on cherche une solution complexe de la forme $Q(x)e^{(2i)x}$ avec $d^oQ = d^oP = 0$ ou une sol. réelle de la forme $y_2(x) = A\cos(2x)+B\sin(2x)$. En remplaçant ceci dans (E_2) on obtient : $\forall x$ on a

$(\cos 2x)(-4A+4B+A)+(\sin 2x)(-4B-4A+B) = -\cos 2x$

ce qui équivaut (sachant que $\sin(2.)$ et $\cos(2.)$ sont linéairement indép.) à un syst. de Cramer :

$\begin{cases} -3A+4B = -1 \\ 4A+3B = 0 \end{cases}$ de sol. (unique) : $\begin{cases} A = \frac{3}{25} \\ B = -\frac{4}{25} \end{cases}$

Donc $\boxed{y_2(x) = \frac{1}{25}(3\cos 2x - 4\sin 2x)}$

⑤ La sol. gén. de (E) est donc $y = y_0+y_1+y_2$:

$$\boxed{y(x) = (\lambda x+\mu)e^{-x} + 1 + \frac{1}{25}(3\cos 2x - 4\sin 2x) \quad \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2}$$

EXERCICE 4

① $(\partial_x f)(x,y) = x^2-2x-3$; $(\partial_y f)(x,y) = 4(y^2-1)$.

② (x,y) pt. crit ssi $(\partial_x f)(x,y) = 0 = (\partial_y f)(x,y) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-3)(x+1)=0$ et $(y-1)(y+1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x,y)\in\{(3,1),(3,-1),(-1,1),(-1,-1)\}$.

③ $(\partial_{xx} f)(x,y) = 2(x-1)$; $(\partial_{yy} f)(x,y) = 8y$; $(\partial_{xy} f)(x,y) = 0$

④ $H(x,y) = \begin{vmatrix} 2(x-1) & 0 \\ 0 & 8y \end{vmatrix} = 16(x-1)y \equiv P(x)Q(y)$.

(5) $H(3,1) = 32 > 0$; $H(-1,-1) = 32 > 0$
$H(3,-1) = -32 < 0$; $H(-1,1) = -32 < 0$

(6) Les pts $(3,-1)$ et $(-1,1)$ sont points de selle (car H strictement négatif).

Pour $(3,1)$ et $(-1,-1)$ on a $H > 0$ donc ce sont des extremums locaux, à savoir :

comme $(\partial_{xx} f)(3,1) = 4 > 0$, $f(3,1) = -\frac{44}{3}$ est un minimum local

comme $(\partial_{xx} f)(-1,-1) = -4 < 0$, $f(-1,-1) = \frac{4}{3}$ est un maximum local

EXERCICE 5

(1) $n = 0$: $F_0(x) = \int_0^x \cos t \, dt = \sin x$

$n = 1$: $F_1(x) = \int_0^x \cos^3 t \sin^2 t \, dx$

Règle de Bioche : si $\omega_1(x) \equiv \cos^3 x \sin^2 x \, dx$ alors on voit qu'on a : $\omega_1(x) = \omega_1(\pi - x)$ donc on fera le chmt de var. $\tau = \sin x$. Donc :

$$F_1(x) = \int_0^{\sin x} (1 - \tau^2) \tau^2 \, d\tau = \left[\frac{\tau^3}{3} - \frac{\tau^5}{5} \right]_0^{\sin x}$$

d'où $F_1(x) = \sin^3 x \left(\frac{1}{3} - \frac{\sin^2 x}{5} \right)$

(2) Toujours par Bioche, si $\omega_n(x) \equiv f_n(x)\,dx$ on voit qu'on a $\omega_n(x) = \omega_n(\pi - x)$ $\forall n$ donc $\tau = \sin x$ s'impose à nouveau comme changement de variable. Alors :

$$F_n(x) = \int_0^{\sin x} (1 - \tau^2)^n \tau^{2n} \, d\tau \overset{\text{Binome de Newton}}{=}$$

$$= \int_0^{\sin x} \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k (\tau^2)^k 1^{n-k} \right) \tau^{2n} \, d\tau$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \int_0^{\sin x} \tau^{2(k+n)} \, d\tau$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \left[\frac{\tau^{2(k+n)+1}}{2(k+n)+1} \right]_0^{\sin x}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(-1)^k}{2(k+n)+1} \cdot (\sin x)^{2(k+n)+1}.$$