CORRIGÉ de L'EXAMEN MS2 - SESSION 1 (20.05.09)

EXERCICE 1 : 1) $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+i} + \frac{c}{x-i}$

On trouve $a = 1$, $b = c = -1/2$. Donc on a sur $\mathbb{C}$ resp. $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2(x+i)} - \frac{1}{2(x-i)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}}$$

2) $I = \frac{1}{2}\int_1^e \frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \ln x\, dx = -\frac{1}{2}\int_1^e \left(\frac{1}{x^2+1}\right)' \ln x\, dx$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\ln x}{x^2+1}\right]_1^e + \frac{1}{2}\int_1^e \frac{dx}{x(x^2+1)} = \frac{-1}{2(e^2+1)} + \frac{1}{2}\int_1^e \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int_1^e \frac{x\,dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{-1}{2(e^2+1)} + \frac{1}{2}[\ln x]_1^e - \frac{1}{4}\left[\ln(x^2+1)\right]_1^e = \frac{1}{2}\frac{e^2}{e^2+1} - \frac{1}{4}\ln\frac{e^2+1}{2}$$

Donc : $\boxed{I = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{e^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{e^2+1}\right)\right)}$

EXERCICE 2 : 1) $I = -\int_0^{\pi} \frac{(\cos x)'}{1+\cos^2 x}\, dx \underset{\boxed{\cos x = t}}{=} -\int_1^{-1} \frac{dt}{1+t^2}$

$\Rightarrow I = [\text{Arctan}\, t]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)$ i.e. $\boxed{I = \frac{\pi}{2}}$

2) $f(x) + f(\pi - x) = \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} + \frac{\pi \sin(\pi - x)}{1+\cos^2(\pi - x)} - \frac{x \sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}$

Or $\sin(\pi - x) = \sin x$ et $\cos(\pi - x) = -\cos x$ donc le premier et le dernier terme se simplifient.

3) $\int_0^{\pi}(f(x) + f(\pi - x))\, dx \underset{\boxed{\pi - x = y}}{=} \int_0^{\pi} f(x)dx - \int_{\pi}^{0} f(y)\,dy \Rightarrow$

$\overset{(2)}{\Rightarrow} 2\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \pi I$ donc $\boxed{J = \frac{\pi}{2} I = \frac{\pi^2}{4}}$

4) $J = -\int_0^{\pi} x\,(\text{Arctan}(\cos x))'\,dx =$

$$= -\left[x\,\text{Arctan}(\cos x)\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \text{Arctan}(\cos x)\,dx$$

Donc $J = \frac{\pi^2}{4} + K \underset{(3)}{\Rightarrow} \boxed{K = 0}$

EXERCICE 5 : 1) $(fy)' = f'y + fy'$ donc

$(E) \Leftrightarrow (y' + fy)' = 0 \Leftrightarrow y' + fy = C$ où $C \in \mathbb{R}$

MAIS ATTENTION : "$\Rightarrow$" ds. le sens où l'ens. des sol. de (E) est donné par l'union des sol. des (e_C) pour $\forall C \in \mathbb{R}$.

2) et 3) : Ce sont donc des questions de cours : il s'agit de donner $y_0(x) = \lambda \exp\left(-\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right)$ où $x_0 \in I$, (où λ = cte. quelconque), solution de (e_0) : $y' + fy = 0$, ensuite appliquer la var. de la cte pour obtenir

$$y_p(x) = C\left(\int_{x_0}^{x} \exp\left(+\int_{x_0}^{t} f(\tau)\,d\tau\right) dt\right) \cdot \exp\left(-\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right)$$

Donc, comme la sol. gén. de (e_C) est $y = y_0 + y_p$:

(*) $y(x) = \left[C\left(\int_{x_0}^{x} \exp\left(\int_{x_0}^{t} f(\tau)\,d\tau\right) dt\right) + \lambda\right] \cdot \exp\left(-\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right)$

où $C \in \mathbb{R}$ fixé pour chaque éq. (e_C) et λ quelconque $\in \mathbb{R}$.

4) La sol gén. de (E) est (*) ci-dessus mais $\forall (C, \lambda) \in \mathbb{R}^2$.

5) Calculons d'abord $\int f(x)\,dx$. Elle vaut, tenant compte de $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$:

$$\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x \cdot 2(\cos^2 x + 1)} \underset{\boxed{\substack{t = \cos x \text{ (BIOCHE)} \\ dt = -\sin x\,dx}}}{=} -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t(t^2+1)} \underset{\boxed{\text{Voir exo 1}}}{=}$$

$$= +\frac{1}{2}\left(\int \frac{t\,dt}{t^2+1} - \int \frac{dt}{t}\right) = +\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\int \frac{(t^2+1)'}{t^2+1}dt - \ln|t|\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+t^2}}{|t|}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{|\cos x|}\right)$$

6) Sur l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ on a $|\cos x| = \cos x$

Donc $\exp\left(\int f(x)\,dx\right) = \sqrt[4]{1 + \frac{1}{\cos^2 x}} = \sqrt[4]{2 + \tan^2 x} = g(x)$

Donc la sol gén de (E) : $\boxed{y(x) = \left(C\int g(x)\,dx + \lambda\right) \int g(x)\,dx}$, $\forall (C, \lambda) \in \mathbb{R}^2$

EXERCICE 4 : 1) $(\partial_x f)(x,y) = 3x^2(1 - 4y^2)$, $(\partial_y f)(x,y) = 2(1 - 4x^3)\,y$.

2) (x,y) est pt. critique ssi $(\partial_x f)(x,y) = 0 = (\partial_y f)(x,y)$.

Alors : cas 1 : $x = 0 \Rightarrow (\partial_x f)(0,y) = 0$ et $(\partial_y f)(x,y) = 0$ seulement si $y = 0$. Donc $(x_0, y_0) = (0,0)$ est pt. critique

<u>Cas 2</u> : $x \neq 0$. Alors $(\partial_x f)(x,y) = 0 \Leftrightarrow y_{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{2}$

et $(\partial_y f)(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ (indépendant de $y_{\frac{1}{2}}$).

Donc les autres 2 points critiques sont : $(x_{\frac{1}{2}}, y_{\frac{1}{2}}) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \pm\frac{1}{2}\right)$

3) $(\partial_{xx} f)(x,y) = 6x(1-4y^2)$

$(\partial_{xy} f)(x,y) = -24x^2y = (\partial_{yx} f)(x,y)$

$(\partial_{yy} f)(x,y) = 2(1-4x^3)$

4) $\det H(x,y) = \begin{vmatrix} 6x(1-4y^2) & -24x^2y \\ -24x^2y & 2(1-4x^3) \end{vmatrix} =$

$= 12x \begin{vmatrix} 4y^2-1 & 4xy \\ 12x^2y & 4x^3-1 \end{vmatrix} =$

5)-6) $\det H(0,0) = 0$ donc on ne peut décider autrement que par une étude locale.

$$\det H\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \pm\frac{1}{2}\right) = \frac{12}{\sqrt[3]{4}} \begin{vmatrix} 0 & \pm 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{4}} \\ \pm\frac{12}{\sqrt[3]{4^2}}\cdot\frac{1}{2} & 4\cdot\frac{1}{4}-1 \end{vmatrix} = -\frac{12}{\sqrt[3]{4}} < 0$$

Donc pour les pts critiques $(x_{\frac{1}{2}}, y_{\frac{1}{2}}) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \pm\frac{1}{2}\right)$ on obtient des points de col (selle).

7) $f(0,0) = 0$. Pour décider si $(0,0)$ est extremum local il suffit d'étudier le signe de $f(x,y) - f(0,0)$ donc de $f(x,y)$ autour de $(0,0)$, par exemple dans un disque de rayon r arbitrairement petit. En passant aux coordonnées polaires on obtient :

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^2\left(r\sin^3\theta(1-4r^2\cos^2\theta) + \cos^2\theta\right).$$

Mais pour la suite $(r_n, \theta_n) := \left(\frac{1}{n}, \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ on a

$f(r_n\cos\theta_n, r_n\sin\theta_n) = \frac{1}{n^3}\cdot(-1)^{n+1}$ qui est alternée et $\to 0$ quand $n \to \infty$. Donc il existe une suite $(x_n, y_n) \to (0,0)$ t.q. $f(x_n, y_n)$ est suite alternée donc $(0,0)$ ne peut être un extremum local.

EXERCICE 3 :

1) $$I_{m,n} = -\int_a^b (x-a)^m \frac{\left((b-x)^{n+1}\right)'}{n+1} dx \overset{\text{IPP } \& \ m \neq 0}{=}$$

$$= -\frac{1}{n+1} \underbrace{\left[(x-a)^m (b-x)^{n+1}\right]_a^b}_{\to = 0} + \frac{m}{n+1} \underbrace{\int_a^b (x-a)^{m-1}(b-x)^{n+1} dx}_{I_{m-1,n+1}}$$

De même

$$I_{m,n} = \int_a^b \frac{\left((x-a)^{m+1}\right)'}{m+1} (b-x)^n dx \overset{\text{IPP } \& \ n \neq 0}{=}$$

$$= \frac{1}{m+1} \underbrace{\left[(x-a)^{m+1}(b-x)^n\right]_a^b}_{\to = 0} + \frac{n}{m+1} \underbrace{\int_a^b (x-a)^{m+1}(b-x)^{n-1} dx}_{\to I_{m+1,n-1}}$$

2) $$I_{0,m+n} = \int_a^b (b-x)^{m+n} dx \overset{\boxed{\substack{t = b-x \\ dt = -dx}}}{=}$$

$$= -\int_{b-a}^0 t^{m+n} dt = \frac{1}{m+n+1} \left[t^{m+n+1}\right]_0^{b-a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{0,m+n} = \frac{(b-a)^{m+n+1}}{m+n+1}} \quad (*)$$

Alors, par récurrence sur la première égalité de la question (1) on a :

$$I_{m,n} = \frac{m}{n+1} I_{m-1,n+1} = \frac{m}{n+1}\cdot\frac{m-1}{n+2}\cdot I_{m-2,n+2} =$$

$$= \dots = \frac{m}{n+1}\cdot\frac{m-1}{n+2}\cdot\ldots\cdot\frac{m-(m-1)}{n+m} I_{m-m,n+m}$$

$$= \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot 1}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+m)} I_{0,n+m} =$$

$$= \frac{m!\cdot 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+m)} I_{0,n+m} \overset{(*)}{=}$$

$$= \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}(b-a)^{m+n+1}.$$