Examen de Mathématiques pour les Sciences (MS2)

Durée: **2** heures

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisées

Exercice 1 : Calculer la primitive $F(x) = \displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$ (à une constante près).

Exercice 2 :

1. Calculer l'intégrale : $I_1 = \displaystyle\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$.
2. Calculer l'intégrale : $I_2 = \displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$. (Indication : on pourrait poser $x = \sin t$ ou bien faire un changement de variable de type Euler)
3. En déduire la valeur de l'intégrale : $I_3 = \displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$. (Indication : IPP).

Exercice 3 : Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y' - (\ln x)y = \mathrm{e}^{x\ln x}\sin x.$$

1. Trouver l'espace vectoriel des solutions de l'équation sans second membre

$$(E_0) \qquad y' - (\ln x)y = 0.$$

2. Trouver une solution particulière de (E). (Indication : variation de la constante)
3. Trouver la solution générale de l'équation (E).

Exercice 4 : Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 y$.

1. Calculer ses dérivées partielles (qu'on notera par $f'_x \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$ et $f'_y \equiv \frac{\partial f}{\partial y}$).
2. Trouver l'ensemble des points critiques de f.
3. Parmi les points critiques de f y a-t-il un point d'extremum local de f ? (Justifier la réponse).

Exercice 5 : (les questions 1 et 2 ci-dessous sont indépendantes)

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Soient $x, y, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha + \beta \neq 0$.
   (a) Montrer que f peut se mettre sous la forme $f = f_p + f_i$ où f_p est fonction paire et f_i est une fonction impaire (préciser f_p, f_i en termes de f).
   (Indication : ecrire l'identité precedente pour $f(x)$ et $f(-x)$ ce qui fournit un systeme)
   (b) Soit $\phi(t) = \alpha f(t) + \beta f(-t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. En déduire de la question précédente le même type de décomposition pour ϕ, où ϕ_p et ϕ_i sont à trouver en termes de f.
   (c) En déduire qu'on a : $\displaystyle\int_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha+\beta}\int_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}} \phi(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Supposons que $\phi(t) = \mathrm{e}^{2t}\cos^2(yt)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ (ici $y \in \mathbb{R}$ est un paramètre).
   (a) Calculer l'intégrale $I(x,y) = \displaystyle\int_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}} \mathrm{e}^{2t}\cos^2(yt)\,\mathrm{d}t$, où $x, y \in \mathbb{R}$.
   (b) Notons par $F(x,y)$ l'intégrale $\displaystyle\int_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$. En déduire des questions précédentes que l'expression exacte de $F(x,y)$. F est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
   (c) Montrer que pour chaque $x \in \mathbb{R}$ on a $\displaystyle\lim_{y\to\pm\infty} F(x,y) = \frac{\sinh x}{2(\alpha+\beta)}$.

Barème indicatif : 25 pts.

Nota bene : Réponses concises + trêve au bla-bla = temps épargné + correcteur bienveillant