Examen de Mathématiques pour les Sciences (MS2)

Durée: **3** heures

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisées

Exercice 1 : Calculer les primitives suivantes (à une constante près) :

1. $F_3(x) = \displaystyle\int \frac{\sin(2x)}{\sqrt{a^2 + b^2 \sin^2 x}}\, \mathrm{d}x$. où $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. (On discutera séparement le cas $b = 0$).
2. $F_1(x) = \displaystyle\int \frac{(1 + x^4)x}{1 + x^6}\, \mathrm{d}x$. (On pourra poser $x^2 = t$).
3. $F_2(x) = \displaystyle\int \sqrt{\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}}\Big(1 - \frac{1}{x^2}\Big)\, \mathrm{d}x$. (Poser $x^2 + 1 = xt$, ensuite $\sqrt{\dfrac{t-1}{t+1}} = y$, ensuite IPP).

Exercice 2 : Résoudre l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y'' + 4y = (x+1)\mathrm{e}^{3x} + \sin(2x).$$

1. Trouver l'espace vectoriel des solutions de l'équation sans second membre
$$(E_0) \qquad y'' + 4y = 0.$$
2. Trouver une solution particulière de (E). (Indication : principe de superposition des solutions).
3. Exprimer la solution générale de l'équation (E).

Exercice 3 : Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x \cos y$.

1. Quel est son domaine de définition ? Est-elle continue sur ce domaine ?
2. Calculer ses dérivées partielles (qu'on notera par $f'_x \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$ et $f'_y \equiv \frac{\partial f}{\partial y}$).
3. Trouver l'ensemble des points critiques de f.
4. Parmi les points critiques de f y a-t-il un point d'extremum local de f ? (Justifier la réponse).

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 qui est *paire* et *périodique* de période T. On se propose de montrer que $\displaystyle\int_0^{2T} \frac{x f'(x)}{1 + f^2(x)}\, \mathrm{d}x = 0$.

1. Etudier la parité des fonctions f' et $\dfrac{f'}{1 + f^2}$.
2. Montrer que f' et $\dfrac{f'}{1 + f^2}$ sont aussi périodiques de période T.
3. En déduire que $\displaystyle\int_0^T \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)}\, \mathrm{d}x = 0$.
4. Posons $g(x) = \dfrac{x f'(x)}{1 + f^2(x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
   (a) Calculer $g(x + 2T) - g(x)$ et en déduire sa parité et sa périodicité.
   (b) Montrer que $\displaystyle\int_0^T g(x + 2T)\, \mathrm{d}x = \int_0^T g(x)\, \mathrm{d}x$.
   (c) Conclure, en montrant que $\int_0^{2T} g(x)\, \mathrm{d}x = 0$.
   (Indication : utiliser (b) et un changement de variable convenable)

Barème indicatif : 25 pts.

Nota bene : Réponses concises + trêve au bla-bla = temps épargné + correcteur bienveillant