CORRIGÉ de l'EXAMEN L1 – MS2 – SESSION 2 (13.06.2008)

EXERCICE 1 : ① $1-x^4>0 \Leftrightarrow x\in]-1,1[$ et l'intégrand est fonction continue (donc admet primitive) sur $]-1,1[=D_F$.

② $F(x)=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2)'}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\,dx \underset{u=x^2}{=} \frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{1}{2}\arccos(x^2)$.

EXERCICE 2 : ① $I_1=\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\left([x]_{-\pi/6}^{\pi/6}+\frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\cos u\,du\right)$
$=\pi/6+\frac{1}{4}[\sin x]_{-\pi/3}^{\pi/3}=\pi/6+\frac{\sqrt{3}}{4}$

2) $x=\sin t \Rightarrow dx=\cos t\,dt$. Donc $I_2=\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\cos^2 t\,dt$ (car $\cos>0$ sur $[-\pi/6,\pi/6]$)
Donc $I_1=I_2$

3) $I_3=\frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2}x\frac{(x^2)'}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=-\int_{-1/2}^{1/2}x\left(\sqrt{1-x^2}\right)'dx$
$=-\left[x\sqrt{1-x^2}\right]_{-1/2}^{1/2}+\int_{-1/2}^{1/2}\sqrt{1-x^2}\,dx=-\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{\pi}{3}+\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\pi}{3}$

EXERCICE 3 : ① $\int\ln x \overset{IPP}{=} x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}=x(\ln x-1)=x\ln\left(\frac{x}{e}\right)$

② (E) : $y'+ay=b$ où $a=-\ln x$ et $b=x^x\sin x$.
Alors la sol. générale de (E_0) : $y'+ay=0$ est (cf. cours)
$y_0=\lambda e^{-\int a}=\lambda e^{\int\ln x}$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$. Donc, par (1) :
$\boxed{y_0=\lambda e^{x\ln\frac{x}{e}}=\lambda\left(\frac{x}{e}\right)^x,\ \lambda\in\mathbb{R}.}$

③ Var. de la cte : $y_{part}(x)=\lambda(x)\,y_0(x)\overset{(E)}{\Rightarrow}\dots$
$\Rightarrow \lambda'(x)=b(x)/y_0(x) \Leftrightarrow \lambda'=(\sin x)e^{x\ln x}\cdot e^{x(1-\ln x)}$
$\Leftrightarrow \lambda'=\sin x\,e^x \Rightarrow \lambda=\int\sin x\,e^x$. Mais
$\int\sin x\,e^x=\sin x\,e^x-\int\cos x\,e^x=(\sin x-\cos x)e^x-\int\sin x\,e^x$
donc $\int\sin x\,e^x=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)e^x$

Donc $y_{part}(x)=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)e^{\cancel{x}+x\ln x-\cancel{x}}=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)x^x$.

④ Conclusion générale de (E) : $y=y_0+y_{part}$:
$y(x)=\lambda\left(\frac{x}{e}\right)^x+\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)\cdot x^x$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$.

EXERCICE 4 : ① $\frac{\partial f}{\partial x}=2xy$; $\frac{\partial f}{\partial y}=x^2$.

② (a,b)=pt. critique ssi $\partial_x f(a,b)=\partial_y f(a,b)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2ab=a^2=0 \Leftrightarrow (a,b)\in\{(0,y)\mid y\in\mathbb{R}\}=\{0\}\times\mathbb{R}$

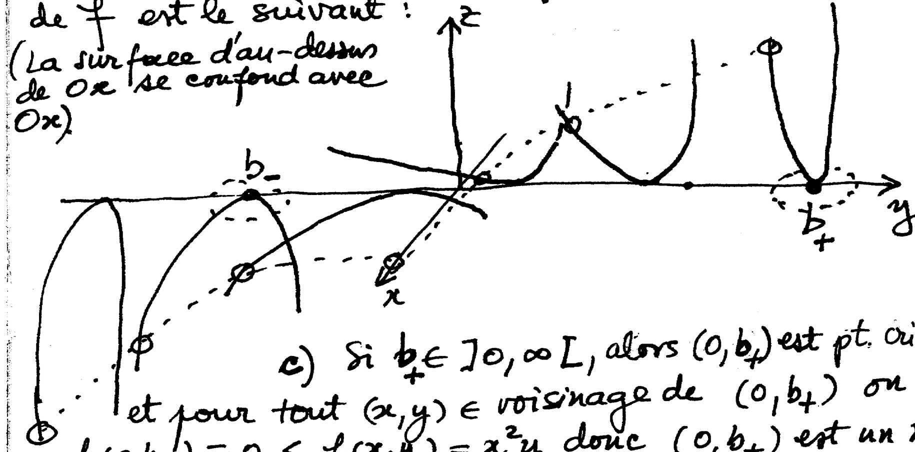
③ a) $\partial^2_{xx}f=2y$; $\partial^2_{xy}f=2x=\partial^2_{yx}f$; $\partial^2_{yy}f=0$.

b) $\Delta(a,b)=\begin{vmatrix}2b & 2a\\ 2a & 0\end{vmatrix}=-4a^2\Rightarrow\Delta(a,b)=0$ $\forall(a,b)\in\{0\}\times\mathbb{R}$.

Donc on ne peut conclure sur la nature d'aucun des points critiques $(a,b)\in\{0\}\times\mathbb{R}$, et il faudra faire une étude locale autour de chaque tel point.

Obs : $\forall(a,b)\in\{0\}\times\mathbb{R}$, $f(a,b)=0$ et le graphe de f est le suivant :

(La surface d'au-dessus de Ox se confond avec Ox)



c) Si $b_+\in]0,\infty[$, alors $(0,b_+)$ est pt. critique et pour tout $(x,y)\in$ voisinage de $(0,b_+)$ on a : $f(0,b_+)=0\le f(x,y)=x^2y$ donc $(0,b_+)$ est un min local non strict.

d) Même raisonnement pour $(0,b_-)$ où $b_-\in]-\infty,0[$: $f(0,b_-)=0\ge f(x,y)=x^2y$.

e) Le point $(0,0)$ n'est pas pt. d'extremum local (ni pt. de selle), car la restriction de f à toute droite du plan passant par $(0,0)$ a en ce point un point d'inflexion (de dérivée nulle).