L1 - MS2 - 2007-2008 - SESSION 1

CORRIGÉ de L'EXAMEN DE MATHEMATIQUES POUR LES SCIENCES (MS2) du 14 mai 2008

1

EXERCICE 1 :

① On remarque que $\sin 2x = 2\sin x\cos x = (\sin^2 x)'$.

$$F_1(x) = \int \frac{(\sin^2 x)'}{\sqrt{a^2+b^2\sin^2 x}}\,dx \underset{(u=\sin^2 x)}{=} \int \frac{du}{\sqrt{a^2+b^2 u}} \underset{(\tau = a^2+b^2u)}{=} \frac{1}{b^2}\int \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} =$$

$$= \frac{2}{b^2}\int (\sqrt{\tau})'\,d\tau = \boxed{\frac{2}{b^2}\sqrt{a^2+b^2\sin^2 x}}$$

② $F_2(x) \underset{x^2=t}{=} \frac{1}{2}\int \frac{1+t^2}{1+t^3}\,dt$ et comme $\frac{1+t^2}{1+t^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{1+t} + \frac{t+1}{1-t+t^2}\right)$

on obtient (remember : $t = x^2$)

$$F_2(x) = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{1+t} + \frac{1}{12}\int \frac{2t-1}{1-t+t^2}\,dt + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{(t-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|1+t| + \frac{1}{12}\ln(t^2-t+1) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right).$$

Donc : $$\boxed{F_2(x) = \frac{1}{3}\ln\left((1+x^2)(x^4-x^2+1)^{1/4}\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}}$$

③ En posant $x^2+1 = xt$ on a $(x \neq 0)$: $t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow dt = (1-\frac{1}{x^2})dx$

et $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} = \frac{x(t-1)}{x(t+1)} = \frac{t-1}{t+1}$. Donc

$$F_3(x) = \int \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\,dt \underset{\left(y=\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\right)}{=} \int y \cdot \frac{4y}{(y^2-1)^2}\,dy =$$

$$= -2\int y\cdot\left(\frac{1}{y^2-1}\right)'dy \underset{IPP}{=} -\frac{2y}{y^2-1} + 2\int \frac{dy}{y^2-1} =$$

$$= -\frac{2y}{y^2-1} + \int\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right)dy = -\frac{2y}{y^2-1} + \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|.\ \text{D'où :}$$

$$F_3(x) = \sqrt{x^2+1+\frac{1}{x^2}} + \ln\left(x + \frac{1}{x} - \sqrt{x^2+1+\frac{1}{x^2}}\right)$$

2

EXERCICE 2 :

① Éq. caractéristique attachée : $r^2+4=0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 2i$

On cherche des solutions réelles, donc on obtient finalement

$\boxed{y_0(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x)}$ $\forall (A,B) \in \mathbb{R}^2$.

② Principe de superposition des solutions : la solution y_p recherchée sera $y_p = y_{p,1} + y_{p,2}$ où $y_{p\,1,2}$ sont solutions des équations (respectivement) :

(E_1) : $y'' + 4y = (x+1)e^{3x}$

(E_2) : $y'' + 4y = \sin(2x)$.

Pour (E_1) : le m. de droite est du type $P(x)e^{mx}$ avec $d^oP = 1$ et $m = 3 \neq r_{1,2}$, donc on cherche $y_{p1}(x) = Q(x)e^{3x}$ où $d^oQ = d^oP$. Soit alors $Q(x) = ax+b$, qu'on remplace dans (E_1) et on a :

$$e^{3x}(5ax + 5b + 2a) = e^{3x}(x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a = 1 \\ 5b+2a = 1 \end{cases} \Rightarrow Q(x) = \frac{1}{5}\left(x + \frac{3}{5}\right)$$

donc $\boxed{y_{p1}(x) = \frac{1}{5}\left(x+\frac{3}{5}\right)e^{3x}}$

Pour (E_2) : le m. de droite est du type $P(x)\sin px$ avec $d^oP = 0$ et $p = 2$. Or, $\sin px = \operatorname{Im} e^{ipx}$ et $ip = 2i = r_1$ = une des 2 racines de l'éq. caractéristique. Donc, d'après le Thm. du cours, on cherche y_{p2} sous la forme $y_{p2} = Q_1(x)\sin 2x + Q_2(x)\cos 2x$ où $Q_{1,2}$ ont $\deg Q_{1,2} = \deg P + 1 = 1$. On cherche donc y_{p2} comme :

$y_{p,2}(x) = (ax+b)\sin 2x + (cx+d)\cos 2x$.
En calculant $y''_{p,2}$ et en les remplaçant dans (E_2) on obtient le système (sachant que $\{x \mapsto \sin 2x, x \mapsto \cos 2x\}$ est un syst. libre de vecteurs) :

$$\begin{cases} 2(-2cx + (a-2d)) + 2a + 4cx + 4d = 0 \\ -2c - 2(2ax + (2b+c)) + 4ax + 4b = 1 \end{cases} \iff$$

(ici les m. de gauche correspondent aux coeffs. de $\cos 2x$ resp. $\sin 2x$ dans $y_p'' + 4y_p$).

$\iff a = 0$ et $c = -1/4$.

Aucune contrainte n'était mise sur b et d, on les prends égaux à 0.

Donc $\boxed{y_{p,2} = -\frac{1}{4} x \cos 2x}$ convient.

(3) La sol. générale de (E) s'écrit : $y = y_0 + y_{p,1} + y_{p,2}$

$$\boxed{y(x) = (A \sin 2x + B\cos 2x) + \frac{1}{5}\left(x + \frac{3}{5}\right)e^{3x} - \frac{x}{4}\cos 2x}$$

EXERCICE 3 : (1) $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}^2$; f continue sur $\mathbb{R}^2$

(2) $f'_x(x,y) = \cos y$; $f'_y(x,y) = -x \sin y$

(3) (x,y) = pt. critique ssi $f'_x(x,y) = f'_y(x,y) = 0$

$\iff (\cos y = 0)$ et $(x = 0$ ou $\sin y = 0) \iff$

$\iff (x = 0$ et $\cos y = 0)$ ou $(\underbrace{\cos y = \sin y = 0}_{\text{impossible}})$

$\iff (x,y) \in \{(0, \frac{\pi}{2} + k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{0\} \times \frac{\pi}{2}(1 + 2\mathbb{Z})$

(4) On calcule le discriminant $\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}$, sachant que $f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, $f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x\cos y$ et que $f''_{xy} = f''_{yx} = -\sin y$. On a :

$\Delta = -\sin^2 y$ et ds. les pts critiques $(a,b) \in \{0\} \times \frac{\pi}{2}(2\mathbb{Z}+1)$ on a $\Delta(a,b) = -\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = -1 < 0$.

Donc tout point critique est un point-selle, donc aucun point critique n'est extremum local.

EXERCICE 4 : (1) $f(x) = -f(-x) \Rightarrow f'(x) = f'(-x)$ donc, comme $1+f^2$ est paire, f' et $f'/(1+f^2)$ sont paires

(2) $f(x) = f(x+T) \Rightarrow f'(x) = \underbrace{(x+T)'}_{=1} f'(x+T)$, etc.

(3) $\int_0^T \frac{f'}{1+f^2} = [\arctan f]_0^T = \arctan f(T) - \arctan f(0)$
$= \arctan f(0) - \arctan f(0) = 0$.

(4a) $g(x+2T) - g(x) \underset{(2)}{=} 2T \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$ donc elle est paire, T-périodique

(4b) $\int_0^T (g(x+2T) - g(x))\,dx = 2T \int_0^T \frac{f'}{1+f^2} \underset{(3)}{=} 0$.

(4c) $\int_0^{2T} = \int_0^T + \int_T^{2T} = \int_{-T}^{T} + \int_T^{2T} - \int_{-T}^{0}$

Mais $\int_{-T}^T g(x)\,dx = 0$ car g est impaire. Aussi, ds. $\int_T^{2T}$ on fait le chmt. de var. : $x \mapsto x + 2T$. Donc $\int_0^{2T} g(x)\,dx = \int_{-T}^0 g(x+2T)\,dx - \int_{-T}^0 g(x)\,dx \underset{g(\cdot+2T)-g = T\text{-périod}}{=}$
$= \int_0^T (g(x+2T) - g(x))\,dx \underset{(4.b)}{=} 0$.