

Mathématiques pour les Sciences (MS2)

Examen du 5 juin 2007 (2^{ème} session), durée : 2 heures
Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisées

Exercice 1. (5 points)

- (a) Décomposer la fraction suivante en éléments simples :

$$Q(x) = \frac{x^3}{x^2 + 3x + 2}.$$

- (b) Calculer l'intégrale $\int_0^1 Q(x) dx$.

Exercice 2. (6 points) Considérons l'équation différentielle

$$x'' + 4x' + 4x = e^t \sin t. \quad (1)$$

- (a) Trouver la solution générale de l'équation homogène

$$x'' + 4x' + 4x = 0. \quad (2)$$

- (b) Trouver une solution particulière de l'équation (1). En déduire la solution générale de l'équation (1).
(c) Trouver toutes les solutions de (1) vérifiant la condition initiale $x(0) = 0$.

Exercice 3. (10 points) Considérons la fonction

$$f(x, y) = \cos(x^2 + y^2).$$

- (a) Trouver le domaine de définition de f .
(b) Calculer les dérivées partielles (du premier ordre) de f .
(c) Montrer que les dérivées partielles de f sont continues comme fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .
(d) Montrer que tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de la forme suivante est un point critique pour f :

$$x = s, \quad y = \pm \sqrt{\pi k - s^2}, \quad (3)$$

où s est un réel et $k \geq 0$ est un entier tel que $\pi k \geq s^2$. Y-a-t-il d'autres points critiques?

- (e) Calculer la matrice

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

et son déterminant. Peut-on en tirer des conclusions concernant le caractère (minimum, maximum, selle) des points critiques de f ?

- (f) Montrer qu'en chacun de ses points critiques la fonction f admet un extremum global.

Solution de l'exercice 1. (a) On divise x^3 par $x^2 + 3x + 2$:

$$x^3 = (x - 3)(x^2 + 3x + 2) + 7x + 6.$$

Il s'ensuit que

$$Q(x) = x - 3 + R(x), \quad R(x) = \frac{7x + 6}{(x + 1)(x + 2)}.$$

On cherche une décomposition de R en éléments simples :

$$R(x) = \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{x + 2}.$$

En multipliant cette égalité par $x + 1$ et en prenant $x = -1$, on obtient $a = -1$. De même, en multipliant par $x + 2$ et prenant $x = -2$, on obtient $b = 8$. On conclut que

$$Q(x) = x - 3 - \frac{1}{x + 1} + \frac{8}{x + 2}. \quad (4)$$

(b) On utilise la décomposition (4) :

$$\begin{aligned} \int_0^1 Q(x) dx &= \int_0^1 \left(x - 3 - \frac{1}{x + 1} + \frac{8}{x + 2} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - 3x - \ln(x + 1) + 8 \ln(x + 2) \right]_0^1 \\ &= 8 \ln 3 - 9 \ln 2 - \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 2. (a) On cherche les racines du polynôme caractéristique :

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0.$$

Cette équation possède une racine double: $\lambda = -2$. Un théorème du cours donne que la solution générale de l'équation (2) est représentable sous la forme

$$x_g(t) = (a + bt) e^{-2t}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

(b) La théorie générale assure l'existence d'une solution particulière de la forme

$$x_p(t) = (\alpha \sin t + \beta \cos t) e^t, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

En reportant (5) dans l'équation (1) et identifiant les termes devant $\sin t$ et $\cos t$, on obtient le système suivant pour α et β :

$$\begin{cases} 6\alpha + 8\beta = 0, \\ 8\alpha - 6\beta = 1. \end{cases}$$

Ce système possède une unique solution:

$$\alpha = \frac{2}{25}, \quad \beta = -\frac{3}{50}.$$

La solution générale de (1) a la forme

$$x(t) = x_g(t) + x_p(t) = (a + bt)e^{-2t} + \frac{4 \sin t - 3 \cos t}{50} e^t.$$

(c) On a :

$$x(0) = 0 \iff a - \frac{3}{50} = 0 \iff a = \frac{3}{50}.$$

Donc, les solutions vérifiant la condition $x(0) = 0$ sont données par la formule

$$y(t) = \left(\frac{3}{50} + bt\right)e^{-2t} + \frac{4 \sin t - 3 \cos t}{50} e^t, \quad b \in \mathbb{R}.$$

□

Solution de l'exercice 3. (a) La fonction f est définie sur \mathbb{R}^2 .

(b) On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x \sin(x^2 + y^2), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y \sin(x^2 + y^2). \quad (6)$$

(c) La fonction $(x, y) \mapsto \sin(x^2 + y^2)$ est continue comme composition d'un polynôme avec sinus. Le produit de deux fonctions continues étant continu, on conclut que $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$ sont continus sur \mathbb{R}^2 .

(d) Considérons le système

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x \sin(x^2 + y^2) = 0, \\ 2y \sin(x^2 + y^2) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifie la première équation si et seulement si

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = \pi k,$$

où $k \geq 0$ est un entier. De même, un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifie la deuxième équation du système (7) si et seulement si

$$y = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = \pi k.$$

On voit que si (x, y) est un point critique pour f , alors il existe un réel s et un entier $k \geq s^2/\pi$ tels que

$$x = s, \quad s^2 + y^2 = \pi k \iff x = s, \quad y = \pm \sqrt{\pi k - s^2}.$$

Réciproquement, tout point de la forme (3) vérifie (7).

(e) On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -2 \sin(x^2 + y^2) - 4x^2 \cos(x^2 + y^2), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4xy \cos(x^2 + y^2), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -2 \sin(x^2 + y^2) - 4y^2 \cos(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Donc,

$$H(x, y) = -2 \begin{pmatrix} \sin(x^2 + y^2) + 2x^2 \cos(x^2 + y^2) & 2xy \cos(x^2 + y^2) \\ 2xy \cos(x^2 + y^2) & \sin(x^2 + y^2) + 2y^2 \cos(x^2 + y^2) \end{pmatrix},$$
$$\det H(x, y) = 4 (\sin^2(x^2 + y^2) + 2(x^2 + y^2) \sin(x^2 + y^2) \cos(x^2 + y^2)).$$

On voit que si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est un point critique pour f , alors $\det H(x, y) = 0$. Par conséquent, on ne peut pas déterminer le caractère des points critiques de f en étudiant $H(x, y)$.

(f) On note d'abord que $|f(x, y)| \leq 1$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. D'autre part, si (x_*, y_*) est un point critique, alors il existe un entier k tel que $x_*^2 + y_*^2 = \pi k$. Donc,

$$f(x_*, y_*) = \cos(\pi k) = \pm 1.$$

On voit que (x_*, y_*) est soit un maximum, soit un minimum global pour f . □